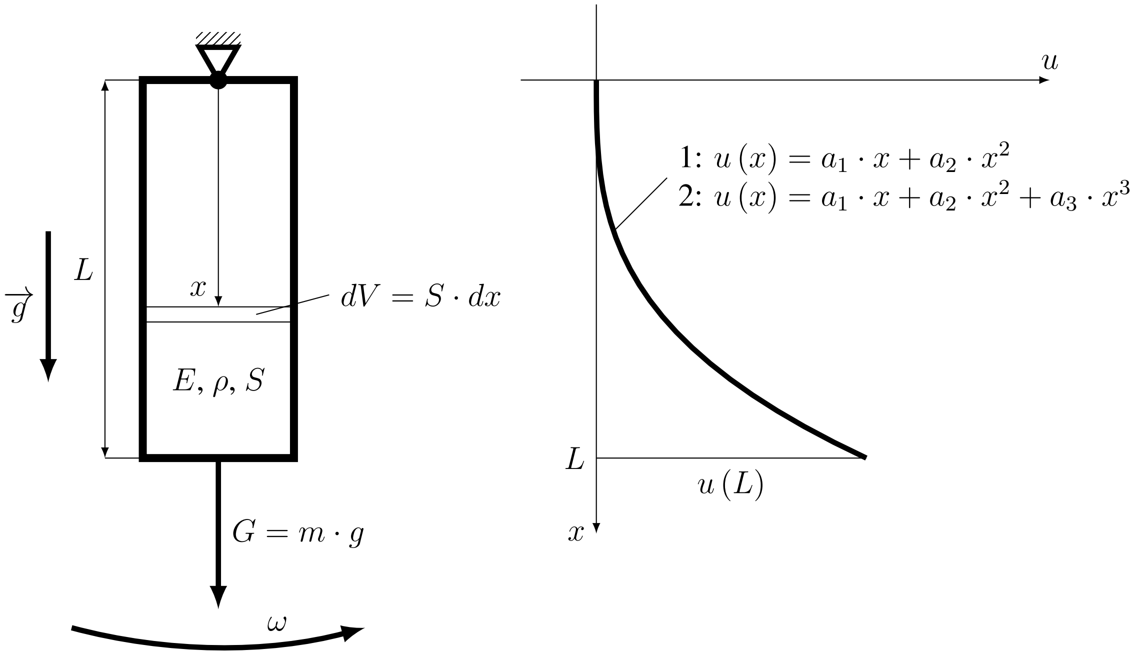
Lagrangeův extremální princip – příklad



Rameno z materiálu E a ρ s břemenem o hmotnosti m na konci rotuje s konstatní úhlovou rychlostí ω v gravitačním poli g. Určete posuv u ve směru x v libovolném místě ramena v okamžiku, kdy rameno prochází svislou polohou podle obrázku.
Aproximace $u(x)$ musí splňovat geometrické okrajové podmínky; v tomto případě je:

$$u|_{x=0} = u(0) = 0$$

Lagrangeův extremální princip:

$$\frac{\partial W}{\partial a_i} = \frac{\partial U}{\partial a_i} + \frac{\partial V}{\partial a_i} = 0 \quad \forall i$$

Řešení pro $u(x) = a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$

Deformační energie v objemu $\mathcal{V} = S \cdot L$ s použitím Hookova zákona $\sigma(x) = E \cdot \varepsilon(x)$:

$$U = \int_{\mathcal{V}} \lambda \cdot d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} \cdot \sigma(x) \cdot \varepsilon(x) \cdot d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \cdot \int_{L} E \cdot \varepsilon^2(x) \cdot S \cdot dx$$

S použitím $\varepsilon(x) = \frac{du}{dx}$:

$$U = \frac{E \cdot S}{2} \cdot \int_0^L (a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x)^2 \cdot dx = \frac{E \cdot S}{2} \cdot \int_0^L \left(a_1^2 + 4 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot x + 4 \cdot a_2^2 \cdot x^2\right) \cdot dx$$

$$U(a_1, a_2) = \frac{E \cdot S}{2} \cdot \left(a_1^2 \cdot L + 2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot L^2 + \frac{4}{3} \cdot a_2^2 \cdot L^3\right)$$

Potenciál síly G:

$$V_G(a_1, a_2) = -G \cdot u(L) = -m \cdot g \cdot \left(a_1 \cdot L + a_2 \cdot L^2\right)$$

Potenciál objemových sil:

$$V_{\mathcal{V}} = -\int\limits_L \overbrace{u(x)}^{\text{posuv } d\mathcal{V}} \cdot \overbrace{\underbrace{\left(g + \omega^2 \cdot x\right)}_{\text{zrychlení ve směru } x} \cdot \rho \cdot \underbrace{S \cdot dx}_{d\mathcal{V}}}^{\text{výsledná síla na } d\mathcal{V}}$$

Po dosazení:

$$V_{\mathcal{V}} = -\int\limits_0^L \left(a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2\right) \cdot \rho \cdot \left(g + \omega^2 \cdot x\right) \cdot S \cdot dx =$$

$$= -\rho \cdot g \cdot S \int\limits_0^L \left(a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2\right) \cdot dx - \rho \cdot \omega^2 \cdot S \cdot \int\limits_0^L \left(a_1 \cdot x^2 + a_2 \cdot x^3\right) \cdot dx =$$

$$= -\rho \cdot g \cdot S \cdot \left(a_1 \cdot \frac{L^2}{2} + a_2 \cdot \frac{L^3}{3}\right) - \rho \cdot \omega^2 \cdot S \cdot \left(a_1 \cdot \frac{L^3}{3} + a_2 \cdot \frac{L^4}{4}\right) =$$

$$= -\rho \cdot S \cdot \left(a_1 \cdot \left(\frac{g \cdot L^2}{2} + \frac{\omega^2 \cdot L^3}{3}\right) + a_2 \cdot \left(\frac{g \cdot L^3}{3} + \frac{\omega^2 \cdot L^4}{4}\right)\right) = V_{\mathcal{V}}\left(a_1, a_2\right)$$

$$V\left(a_1, a_2\right) = V_G\left(a_1, a_2\right) + V_{\mathcal{V}}\left(a_1, a_2\right)$$

Lagrangeův princip:

$$\frac{\partial U\left(a_1, a_2\right)}{\partial a_1} + \frac{\partial V\left(a_1, a_2\right)}{\partial a_1} = 0$$
$$\frac{\partial U\left(a_1, a_2\right)}{\partial a_2} + \frac{\partial V\left(a_1, a_2\right)}{\partial a_2} = 0$$

$$\frac{E \cdot S}{2} \cdot \left(2 \cdot a_1 \cdot L + 2 \cdot a_2 \cdot L^2\right) - m \cdot g \cdot L - \rho \cdot S \cdot \left(\frac{g \cdot L^2}{2} + \frac{\omega^2 \cdot L^3}{3}\right) = 0$$
$$\frac{E \cdot S}{2} \cdot \left(2 \cdot a_2 \cdot L^2 + \frac{8}{3} \cdot a_2 \cdot L^3\right) - m \cdot g \cdot L^2 - \rho \cdot S \cdot \left(\frac{g \cdot L^3}{3} + \frac{\omega^2 \cdot L^4}{4}\right) = 0$$

Maticový zápis soustavy 2 rovnic o neznámých a_1 a a_2:

$$E \cdot S \cdot L \cdot \begin{vmatrix} 1 & L \\ L & \frac{4}{3} \cdot L^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m \cdot g \cdot L + \rho \cdot S \cdot \left(\frac{g \cdot L^2}{2} + \frac{\omega^2 \cdot L^3}{3}\right) \\ m \cdot g \cdot L^2 + \rho \cdot S \cdot \left(\frac{g \cdot L^3}{3} + \frac{\omega^2 \cdot L^4}{4}\right) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & L \\ L & \frac{4}{3} \cdot L^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{m \cdot g}{E \cdot S} + \frac{\rho}{E} \cdot \left(\frac{g \cdot L}{2} + \frac{\omega^2 \cdot L^2}{3}\right) \\ \frac{m \cdot g \cdot L}{E \cdot S} + \frac{\rho}{E} \cdot \left(\frac{g \cdot L^2}{3} + \frac{\omega^2 \cdot L^3}{4}\right) \end{vmatrix}$$

Poznámka: Symetrie matice soustavy není náhodná.
Řešení soustavy rovnic:

$$a_1 = \frac{m \cdot \left(g + \omega^2 \cdot L\right)}{E \cdot S} + \frac{\rho \cdot g \cdot L}{E} + \frac{7}{12} \cdot \frac{\omega^2 \cdot \rho \cdot L^2}{E}$$
$$a_2 = -\frac{\rho \cdot g}{2 \cdot E} - \frac{\omega^2 \cdot \rho \cdot L}{4 \cdot E}$$

Výsledné (přibližné) řešení:

$$u(x) = \left(\frac{m \cdot \left(g + \omega^2 \cdot L\right)}{E \cdot S} + \frac{\rho \cdot g \cdot L}{E} + \frac{7}{12} \cdot \frac{\omega^2 \cdot \rho \cdot L^2}{E}\right) \cdot x - \left(\frac{\rho \cdot g}{2 \cdot E} + \frac{\omega^2 \cdot \rho \cdot L}{4 \cdot E}\right) \cdot x^2$$

Řešení pro $u(x) = a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3$

Deformační energie:

$$U = \frac{E \cdot S}{2} \cdot \int\limits_0^L \left(a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + 3 \cdot a_3 \cdot x^2\right)^2 \cdot dx$$
$$= \frac{E \cdot S}{2} \cdot \int\limits_0^L \left(a_1^2 + 4 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot x + \left(4 \cdot a_2^2 + 6 \cdot a_1 \cdot a_3\right) \cdot x^2 + 12 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot x^3 + 9 \cdot a_3^2 \cdot x^4\right) \cdot dx$$

$$U(a_1, a_2, a_3) =$$
$$= \frac{E \cdot S}{2} \cdot \left(a_1^2 \cdot L + 2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot L^2 + \left(4 \cdot a_2^2 + 6 \cdot a_1 \cdot a_3\right) \cdot \frac{L^3}{3} + 3 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot L^4 + 9 \cdot a_3^2 \cdot \frac{L^5}{5}\right)$$

Potenciál síly G:

$$V_G(a_1, a_2, a_3) = -G \cdot u(L) = -m \cdot g \cdot \left(a_1 \cdot L + a_2 \cdot L^2 + a_3 \cdot L^3\right)$$

Potenciál objemových sil po dosazení:

$$V_{\mathcal{V}} = V_{\mathcal{V}}(a_1, a_2, a_3) = -\int\limits_0^L \left(a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3\right) \cdot \rho \cdot \left(g + \omega^2 \cdot x\right) \cdot S \cdot dx =$$
$$= -\rho \cdot g \cdot S \int\limits_0^L \left(a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3\right) \cdot dx - \rho \cdot \omega^2 \cdot S \cdot \int\limits_0^L \left(a_1 \cdot x^2 + a_2 \cdot x^3 + a_3 \cdot x^4\right) \cdot dx =$$
$$= -\rho \cdot g \cdot S \cdot \left(a_1 \cdot \frac{L^2}{2} + a_2 \cdot \frac{L^3}{3} + a_3 \cdot \frac{L^4}{4}\right) - \rho \cdot \omega^2 \cdot S \cdot \left(a_1 \cdot \frac{L^3}{3} + a_2 \cdot \frac{L^4}{4} + a_3 \cdot \frac{L^5}{5}\right) =$$
$$= -\rho \cdot S \cdot \left(a_1 \cdot \left(\frac{g \cdot L^2}{2} + \frac{\omega^2 \cdot L^3}{3}\right) + a_2 \cdot \left(\frac{g \cdot L^3}{3} + \frac{\omega^2 \cdot L^4}{4}\right) + a_3 \cdot \left(\frac{g \cdot L^4}{4} + \frac{\omega^2 \cdot L^5}{5}\right)\right)$$

Lagrangeův princip:

$$\frac{\partial U(a_1, a_2, a_3)}{\partial a_1} + \frac{\partial V(a_1, a_2, a_3)}{\partial a_1} = 0$$
$$\frac{\partial U(a_1, a_2, a_3)}{\partial a_2} + \frac{\partial V(a_1, a_2, a_3)}{\partial a_2} = 0$$
$$\frac{\partial U(a_1, a_2, a_3)}{\partial a_3} + \frac{\partial V(a_1, a_2, a_3)}{\partial a_3} = 0$$

$$\frac{E \cdot S}{2} \cdot \left(2 \cdot a_1 \cdot L + 2 \cdot a_2 \cdot L^2 + 2 \cdot a_3 \cdot L^3\right) - m \cdot g \cdot L - \rho \cdot S \cdot \left(\frac{g \cdot L^2}{2} + \frac{\omega^2 \cdot L^3}{3}\right) = 0$$
$$\frac{E \cdot S}{2} \cdot \left(2 \cdot a_2 \cdot L^2 + \frac{8}{3} \cdot a_2 \cdot L^3 + 3 \cdot a_3 \cdot L^4\right) - m \cdot g \cdot L^2 - \rho \cdot S \cdot \left(\frac{g \cdot L^3}{3} + \frac{\omega^2 \cdot L^4}{4}\right) = 0$$
$$\frac{E \cdot S}{2} \cdot \left(2 \cdot a_1 \cdot L^3 + 3 \cdot a_2 \cdot L^4 + \frac{18}{5} \cdot a_3 \cdot L^5\right) - m \cdot g \cdot L^3 - \rho \cdot S \cdot \left(\frac{g \cdot L^4}{4} + \frac{\omega^2 \cdot L^5}{5}\right) = 0$$

Maticový zápis soustavy 3 rovnic o neznámých a_1, a_2 a a_3:

$$E \cdot S \cdot L \cdot \begin{vmatrix} 1 & L & L^2 \\ L & \frac{4}{3} \cdot L^2 & \frac{3}{2} \cdot L^3 \\ L^2 & \frac{3}{2} \cdot L^3 & \frac{9}{5} \cdot L^4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m \cdot g \cdot L + \rho \cdot S \cdot \left(\frac{g \cdot L^2}{2} + \frac{\omega^2 \cdot L^3}{3} \right) \\ m \cdot g \cdot L^2 + \rho \cdot S \cdot \left(\frac{g \cdot L^3}{3} + \frac{\omega^2 \cdot L^4}{4} \right) \\ m \cdot g \cdot L^3 + \rho \cdot S \cdot \left(\frac{g \cdot L^4}{4} + \frac{\omega^2 \cdot L^5}{5} \right) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & L & L^2 \\ L & \frac{4}{3} \cdot L^2 & \frac{3}{2} \cdot L^3 \\ L^2 & \frac{3}{2} \cdot L^3 & \frac{9}{5} \cdot L^4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{m \cdot g}{E \cdot S} + \frac{\rho}{E} \cdot \left(\frac{g \cdot L}{2} + \frac{\omega^2 \cdot L^2}{3} \right) \\ \frac{m \cdot g \cdot L}{E \cdot S} + \frac{\rho}{E} \cdot \left(\frac{g \cdot L^2}{3} + \frac{\omega^2 \cdot L^3}{4} \right) \\ \frac{m \cdot g \cdot L^2}{E \cdot S} + \frac{\rho}{E} \cdot \left(\frac{g \cdot L^3}{4} + \frac{\omega^2 \cdot L^4}{5} \right) \end{vmatrix}$$

Řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{m \cdot (g + \omega^2 \cdot L)}{E \cdot S} + \frac{\rho \cdot g \cdot L}{E} + \frac{\omega^2 \cdot \rho \cdot L^2}{2 \cdot E} \\ a_2 &= -\frac{\rho \cdot g}{2 \cdot E} \\ a_3 &= -\frac{\omega^2 \cdot \rho}{6 \cdot E} \end{aligned}$$

Výsledné (přesné) řešení:

$$u\left(x\right) = \left(\frac{m \cdot (g + \omega^2 \cdot L)}{E \cdot S} + \frac{\rho \cdot g \cdot L}{E} + \frac{\omega^2 \cdot \rho \cdot L^2}{2 \cdot E} \right) \cdot x - \frac{\rho \cdot g}{2 \cdot E} \cdot x^2 - \frac{\omega^2 \cdot \rho}{6 \cdot E} \cdot x^3$$