# Obecné řešení křivých prutů

Obecný průběh normálového napětí; platí za předpokladu Bernoulliho-Navierovy hypotézy pro libovolný průřez:

$$\sigma = E \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \cdot \left(1 - \frac{R-e}{r}\right) \tag{1}$$

Normálová síla na obecný průřez; $R$ je poloměr střednice (spojnice těžiště průřezů):

$$N = \int_S \sigma \cdot dS = E \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \cdot \int_S \left(1 - \frac{R-e}{r}\right) \cdot dS = 0$$

$$\int_S \left(1 - \frac{R-e}{r}\right) \cdot dS = S - (R-e) \cdot \int_S \frac{dS}{r} = 0$$

$$S = (R-e) \cdot \int_S \frac{dS}{r} \tag{2}$$

$$e = R - \frac{S}{\int_S \frac{dS}{r}} \tag{3}$$

Výsledný moment:

$$\begin{aligned}
M &= \int_S \sigma \cdot (r-R) \cdot dS = E \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \cdot \int_S \left(1 - \frac{R-e}{r}\right) \cdot (r-R) \cdot dS \\
&= E \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \cdot \int_S \left(r - R - (R-e) \cdot \frac{r-R}{r}\right) \cdot dS = \\
&= E \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \cdot \int_S \left(r - R - (R-e) \cdot \left(1 - \frac{R}{r}\right)\right) \cdot dS = \\
&= E \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \cdot \int_S \left(r - R - R + e + (R-e) \cdot \frac{R}{r}\right) \cdot dS = \\
&= E \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \cdot \left( \underbrace{\int_S r \cdot dS}_{\substack{=R\cdot S \\ \text{statický moment} \\ \text{podle definice}}} - 2 \cdot \underbrace{\int_S R \cdot dS}_{=R\cdot S} + \underbrace{\int_S e \cdot dS}_{=e\cdot S} + \underbrace{R \cdot (R-e) \cdot \int_S \frac{dS}{r}}_{\text{podle (2) } =R\cdot S} \right) = E \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \cdot e \cdot S
\end{aligned}$$

$$M = E \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \cdot e \cdot S$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = \frac{M}{E \cdot S \cdot e} \tag{4}$$

Dosazením do (1) dostaneme:

$$\sigma = \frac{M}{S \cdot e} \cdot \left(1 - \frac{R-e}{r}\right) \tag{5}$$

Vztah (5) platí pro obecný průřez. Hodnotu $e$ určíme podle (3).

**Určení komplementární energie napjatosti**

Vztah (4) rozšíříme následujícím způsobem; $\varphi$ je funkcí pouze polohy $\psi$, funkcemi $\psi$ mohou obecně být i hodnoty $E$, $S$, $e$ a $R$:

$$\frac{d\varphi}{R \cdot d\psi} = \frac{d\varphi}{dl} = \frac{M(\psi)}{E \cdot S \cdot e \cdot R}$$

Práce momentu $M(\psi)$ na úseku prutu $dl$ je rovna přírůstku komplementární energie napjatosti $dU^*$; platí předpoklad Kirchhoffovy teorie, že natočené řezy zůstávají kolmé na tečnu ke střednici:

$$dU^* = \frac{1}{2} \cdot M(\psi) \cdot d\varphi = \frac{M^2}{2 \cdot E \cdot S \cdot e \cdot R} \cdot dl$$

Komplementární energie napjatosti v prutu o délce $L$ od ohybového momentu $M$ pak je:

$$U^* = \int_L \frac{M^2}{2 \cdot E \cdot S \cdot e \cdot R} \cdot dl \tag{6}$$

Znalost $U^*$ pak umožňuje použití 2. a 3. Castiglianovy věty:

$$q_i = \frac{\partial U^*(Q_i)}{\partial Q_i}$$

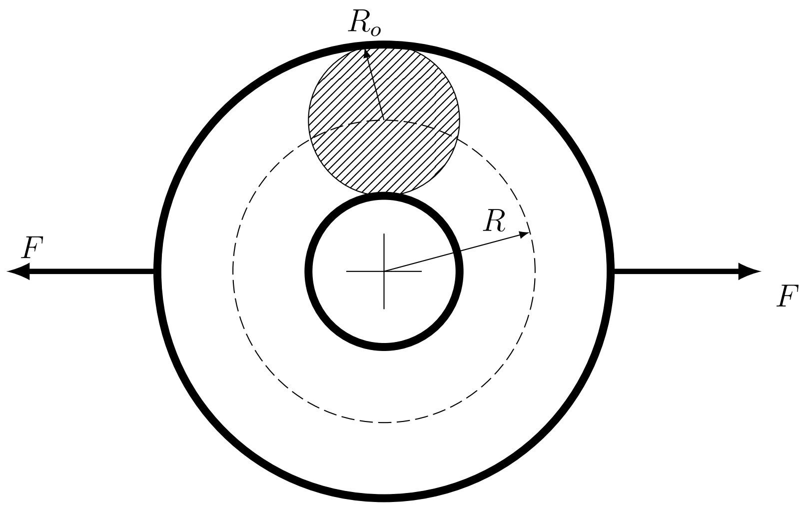
kde $Q_i$ je zobecněná vnější síla a $q_i$ zobecněný posuv pod $Q_i$.
Srovnání (6) se štíhlým prutem:

$$U^* = \int_L \frac{M^2}{2 \cdot E \cdot J_y} \cdot dl$$

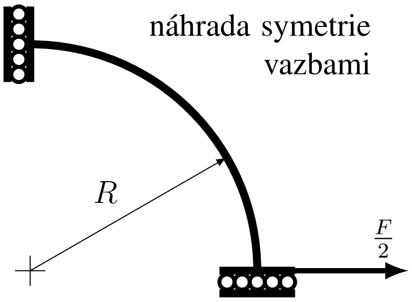
vede na srovnání:

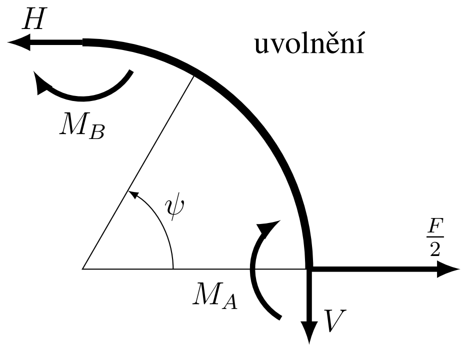
$$J_y \cong S \cdot e \cdot R$$

# Toroid




Určete napjatost v toroidu zatíženém podle obrázku.




Řešením rovnic rovnováhy dostaneme:

$$H = \frac{F}{2} \qquad V = 0 \qquad M_A + M_B - \frac{F}{2} \cdot R = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\text{1xSN}}$$

Za staticky neurčitou neznámou volíme reakční moment $M_A$:

$$\frac{\partial U^*}{\partial M_A} = 0$$

| $\psi$ | $M$ | $\frac{\partial M}{\partial M_A}$ | $\frac{\partial M}{\partial F}$ |
|---|---|---|---|
| $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ | $M_A - \frac{F}{2} \cdot R \cdot \sin\psi$ | 1 | $-\frac{R}{2} \cdot \sin\psi$ |

Mohrův integrál:

$$\frac{1}{E \cdot S \cdot e \cdot R} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( M_A - \frac{F}{2} \cdot R \cdot \sin\psi \right) \cdot R \cdot d\psi = 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( M_A - \frac{F}{2} \cdot R \cdot \sin\psi \right) \cdot d\psi = 0$$

$$M_A \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{F \cdot R}{2}$$

$$M_A = \frac{F \cdot R}{\pi}$$

$$M_B = F \cdot R \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right)$$

Průběh ohybového momentu:

$$M = F \cdot R \cdot \left( \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \cdot \sin\psi \right)$$

NB: Reakční momenty ani průběh výsledného ohybového momentu nezávisí na použité teorii (tlusté vs. štíhlé křivé pruty)!

Průběh $\sigma_M$ od ohybového momentu podle (5):

$$\sigma_M(r, \psi) = \frac{F \cdot R}{S \cdot e} \cdot \left( 1 - \frac{R - e}{r} \right) \cdot \left( \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \cdot \sin\psi \right)$$

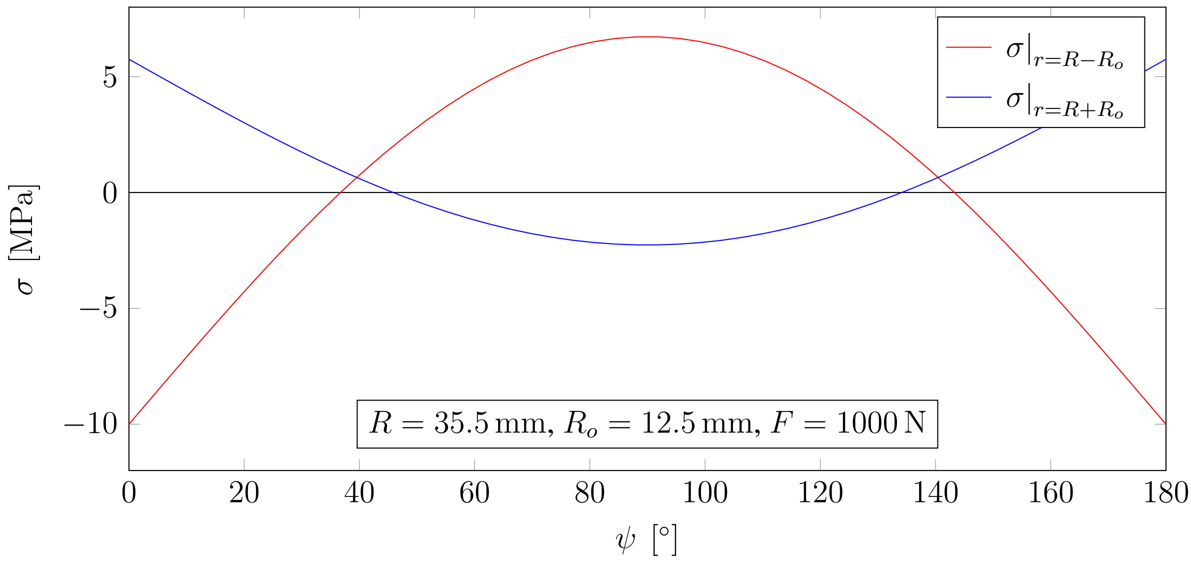
Průběh $\sigma_N$ od normálové síly:

$$\sigma_N(\psi) = \frac{F}{2 \cdot S} \cdot \sin\psi$$

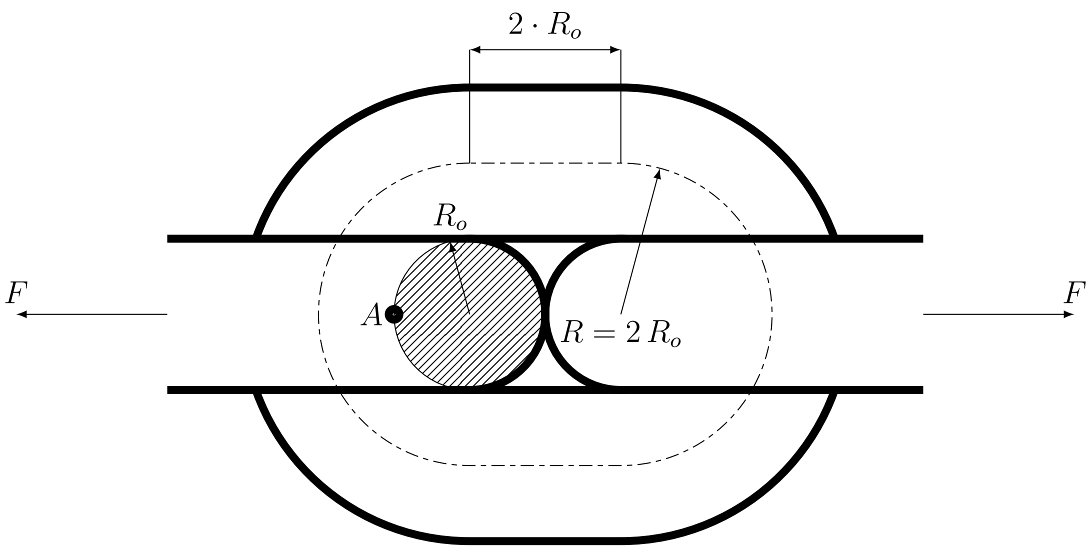
S použitím obecného odvození (2) dostaneme pro prut podle zadání:

$$e = R - \frac{S}{\int\limits_S \frac{dS}{R+z}} = R - \frac{R_o^2}{2 \cdot \left(R - \sqrt{R^2 - R_o^2}\right)}$$

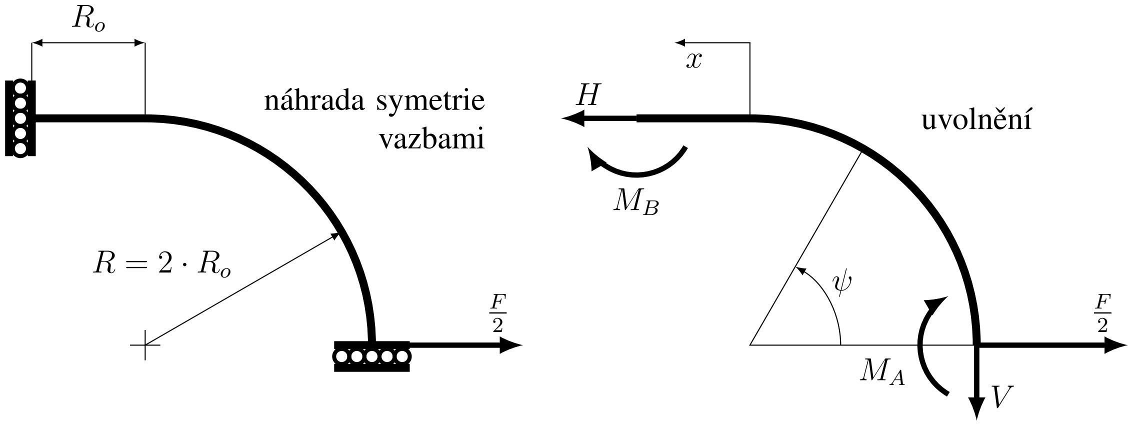
Průběh normálového napětí $\sigma = \sigma_N + \sigma_M$ na vnitřním a na vnějším poloměru toroidu je na následujícím grafu:




## Oko řetězu




Určete napjatost v oku řetězu. Předpokládejte bodový dotyk sousedních ok (v bodě $A$ a symetricky). Postup analogický předchozímu příkladu:




Řešením rovnic rovnováhy dostaneme:

$$H = \frac{F}{2} \qquad V = 0 \qquad M_A + M_B - F \cdot R_o = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\text{1xSN}}$$

Za staticky neurčitou neznámou volíme reakční moment $M_A$:

$$\frac{\partial U^*}{\partial M_A} = 0$$

| | $M$ | $\frac{\partial M}{\partial M_A}$ | $\frac{\partial M}{\partial F}$ |
|---|---|---|---|
| $\psi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ | $M_A - F \cdot R_o \cdot \sin\psi$ | 1 | $-R_o \cdot \sin\psi$ |
| $x \in \langle 0, R_o \rangle$ | $M_A - F \cdot R_o$ | 1 | $-R_o$ |

Mohrův integrál:

$$\frac{1}{2 \cdot E \cdot S \cdot e \cdot R_o} \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (M_A - F \cdot R_o \cdot \sin\psi) \cdot 2 \cdot R_o \cdot d\psi + \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot \int\limits_0^{R_o} (M_A - F \cdot R_o) \cdot dx = 0$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (M_A - F \cdot R_o \cdot \sin\psi) \cdot d\psi + \frac{S \cdot e}{J_y} \cdot \int\limits_0^{R_o} (M_A - F \cdot R_o) \cdot dx = 0$$

$$M_A \cdot \left( \frac{\pi}{2} + \frac{S \cdot e \cdot R_o}{J_y} \right) = F \cdot R_o \cdot \left( 1 + \frac{S \cdot e \cdot R_o}{J_y} \right)$$

$$M_A = F \cdot R_o \cdot \frac{S \cdot e \cdot R_o + J_y}{S \cdot e \cdot R_o + \frac{\pi}{2} \cdot J_y}$$

$$M_B = F \cdot R_o \cdot \frac{\left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \cdot J_y}{S \cdot e \cdot R_o + \frac{\pi}{2} \cdot J_y}$$

Průběh ohybového momentu; $J_y = \frac{\pi \cdot R_o^4}{4}$:

$$M = F \cdot R_o \cdot \left( \frac{S \cdot e \cdot R_o + J_y}{S \cdot e \cdot R_o + \frac{\pi}{2} \cdot J_y} - \sin\psi \right) \qquad \text{pro} \quad \psi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$$

$$M = F \cdot R_o \cdot \left( \frac{S \cdot e \cdot R_o + J_y}{S \cdot e \cdot R_o + \frac{\pi}{2} \cdot J_y} - 1 \right) \qquad \text{pro} \quad x \in \langle 0, R_o \rangle$$

Průběh napětí $\sigma_M$ od ohybového momentu na vnitřní straně prutu v zakřivené části podle (5):

$$\sigma_M = \frac{M(\psi)}{S \cdot e} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot R_o - e}{R_o}\right) \quad \text{pro} \quad \psi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$$

S použitím obecného odvození (2) dostaneme pro prut podle zadání:

$$e = 2 \cdot R_o - \frac{R_o^2}{2 \cdot \left(2 \cdot R_o - \sqrt{4 \cdot R_o^2 - R_o^2}\right)} = R_o \cdot \frac{7 - 4 \cdot \sqrt{3}}{4 - 2 \cdot \sqrt{3}}$$

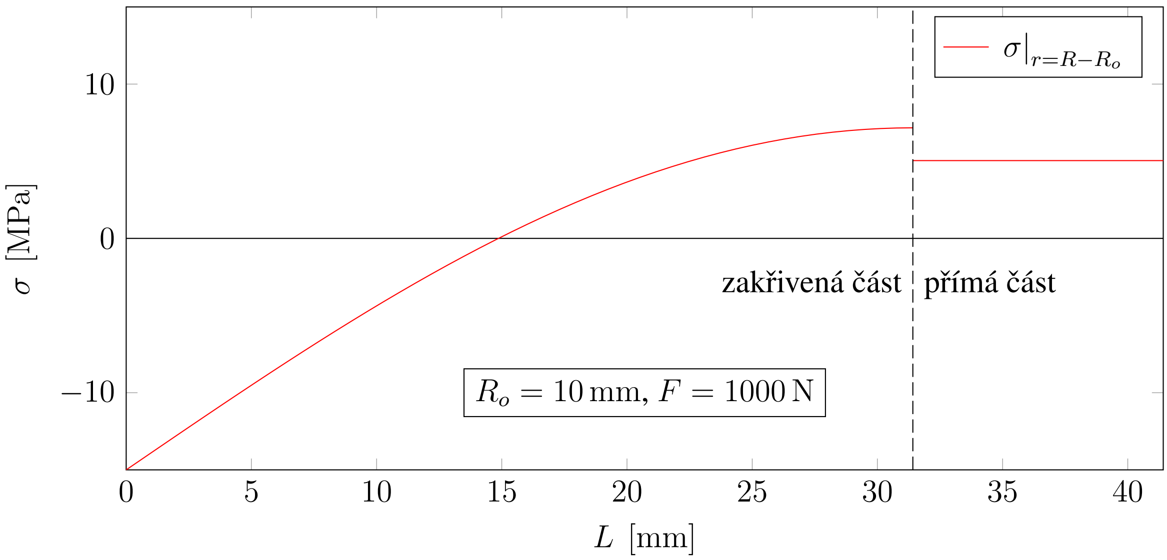
Průběh napětí $\sigma_M$ od ohybového momentu na vnitřní straně prutu v přímé části:

$$\sigma_M = \frac{M}{W_o} = \frac{4 \cdot M}{\pi \cdot R_o^3} \, (= konst.)$$

Průběh $\sigma_N$ od normálové síly v zakřivené, resp. v přímé části:

$$\sigma_N(\psi) = \frac{F}{2 \cdot S} \cdot \sin\psi \quad \text{pro} \quad \psi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, \quad \text{resp.} \quad \sigma_N(\psi) = \frac{F}{2 \cdot S}$$

Průběh normálového napětí $\sigma = \sigma_N + \sigma_M$ na vnitřním poloměru oka v závislosti na průběžné poloze od bodu $A$ podél střednice je na následujícím grafu:




NB: Na rozhraní mezi přímou a zakřivenou částí oka dochází k nespojitosti v hodnotě normálového napětí. Tato nespojitost musí být kvůli zachování rovnováhy elementu v tomto řezu kompenzována nenulovým smykovým napětím $\tau_{zx}$ (přesněji nenulovou hodnotou $\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$) a tudíž i nenulovou deformací $\gamma_{zx}$, což je ovšem v rozporu s předpoklady Bernoulli-Navierovy hypotézy. Dále platí, že napětí $\sigma_z$ v radiálním směru $r$ (resp. $z$) v zakřivené části nejsou obecně nulová, na rozdíl od přímé části, kde nulová jsou. Rovněž v této složce tenzoru napětí tak dochází na rozhraní přímé a zakřivené části k nespojitosti, která je kompenzována smykovým napětím $\tau_{zx}$. Napjatost v takovémto tělese je tudíž složitější, než je možné popsat s použitím zjednodušujích hypotéz.