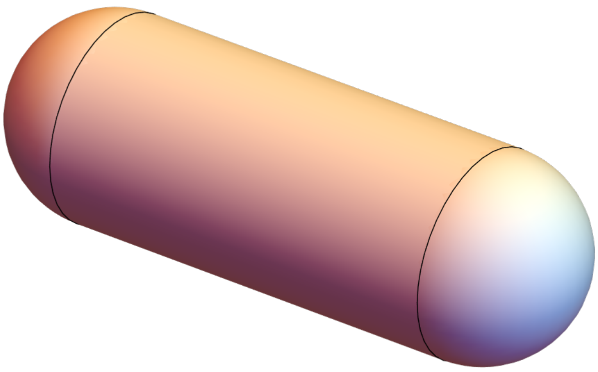
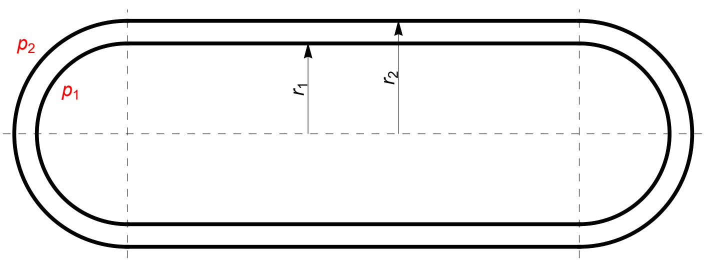
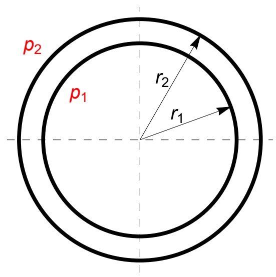
Uzavřená silnostěnná válcová tlaková nádoba

Zadání







Silnostěnná válcová tlaková nádoba (viz obrázek) je zatížena vnitřním tlakem p_1. Vnější tlak je p_2

Dáno: r_1, r_2, p_1, p_2, $\mathbb{E}$, μ, σ_D

Určete: Napětí a poměrnou deformaci ve stěně nádoby, změnu vnějšího průměru nádoby, maximální vnitřní tlak v nádobě

Řešení

Z obrázku vyplývá, že se jedná o *uzavřenou tlakovou* nádobu. Musíme si také uvědomit, že známé vztahy platí pouze ve střední válcové části nádoby. To je oblast, kde vliv obou den je možné zanedbat.

Napětí

Pro napětí platí známé vztahy

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2}, \tag{1}$$

$$\sigma_t = A + \frac{B}{r^2}, \tag{2}$$

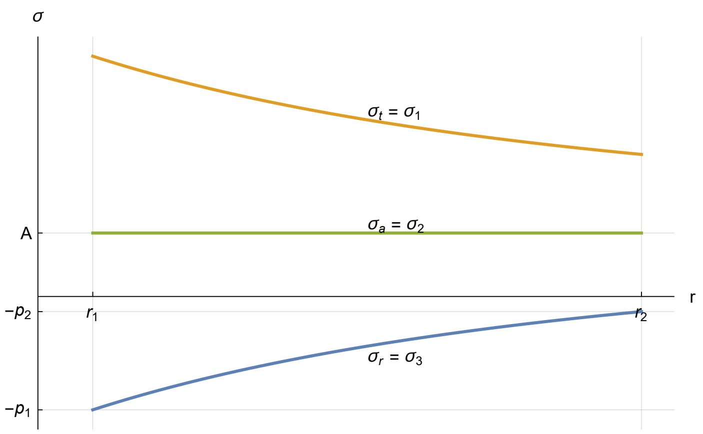
$$\sigma_a = A, \tag{3}$$

kde

$$A = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \tag{4}$$

$$B = (p_1 - p_2) \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \tag{5}$$

Na následujícm grafu vidíme průběh napětí. Kladná konstanta A je osou symetrie grafů σ_r a σ_t. Tečné napětí je největší a je to tedy první hlavní napětí. Axiální napětí je druhé hlavní napětí. Nejmenší je radiální napětí a jedná se tedy o třetí hlavní napětí.



Ekvivalentní napětí určíme podle hypotézy τ_{Max} a platí

$$\sigma_{ekv} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t - \sigma_r. \tag{6}$$

Pohledem na graf snadno zjistíme, že největší ekvivalentní napětí je tam, kde jsou od sebe čáry σ_t a σ_r nejdál. To je na souřadnici $r = r_1$:

$$\sigma_{ekvMAX} = \sigma_{t1} - \sigma_{r1}. \tag{7}$$

Dosadíme za příslušná napětí a maximální ekvivalentní napětí položíme rovné dovolenému napětí. Získáme tak pevnostní podmínku ve tvaru

$$A + \frac{B}{r_1^2} - \left(A - \frac{B}{r_1^2}\right) = \sigma_D\,, \tag{8}$$

neboli

$$\sigma_D = \frac{2\,B}{r_1^2}\,. \tag{9}$$

Do tohoto vztahu dosadíme za B a vyjádříme z něj závorku ($p_1 - p_2$). Tato závorka totiž říká, o kolik může být tlak uvnitř nádoby větší, než je tlak vně nádoby. Je to tedy *přetlak,* který nádoba vydrží.

$$p_1 - p_2 = \frac{\sigma_D}{2}\left(1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right). \tag{10}$$

Poměrná deformace

Pro poměrnou deformaci platí zobecněný Hookův zákon

$$\varepsilon_r = \frac{1}{\mathbb{E}}\left(\sigma_r - \mu\,(\sigma_t + \sigma_a)\right), \tag{11}$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{\mathbb{E}}\left(\sigma_t - \mu\,(\sigma_r + \sigma_a)\right), \tag{12}$$

$$\varepsilon_a = \frac{1}{\mathbb{E}}\left(\sigma_a - \mu\,(\sigma_t + \sigma_r)\right). \tag{13}$$

Po dosazení vztahů pro napětí dostáváme

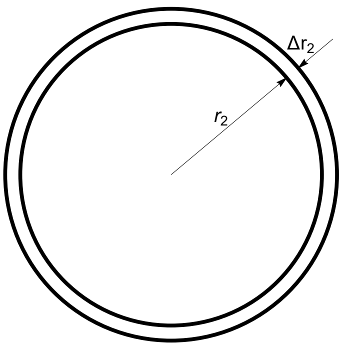
$$\varepsilon_r = \frac{1}{\mathbb{E}}\left(A\,(1 - 2\,\mu) - \frac{B}{r^2}\,(1 + \mu)\right), \tag{14}$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{\mathbb{E}}\left(A\,(1 - 2\,\mu) + \frac{B}{r^2}\,(1 + \mu)\right), \tag{15}$$

$$\varepsilon_a = \frac{1}{\mathbb{E}}\,A\,(1 - 2\,\mu)\,. \tag{16}$$

Změna vnějšího průměru

Na obrázku vidíme vnější obvod nádoby před deformací a po deformaci.



Pro poměrnou změnu délky kružnice o poloměru r_2 platí

$$\varepsilon_{t2} = \frac{o' - o}{o} = \frac{2\,\pi\,(r_2 + \Delta r_2) - 2\,\pi\,r_2}{2\,\pi\,r_2} = \frac{\Delta r_2}{r_2} \tag{17}$$

a tedy

$$\triangle r_2 = r_2\, \varepsilon_{t2}. \tag{18}$$

Do tohoto vztahu dosadíme za ε_t a za r dosadíme r_2, tedy:

$$\triangle r_2 = \frac{r_2}{\mathbb{E}} \left(A\,(1 - 2\,\mu) + \frac{B}{r_2^2}\,(1 + \mu) \right). \tag{19}$$

Změna průměru je pak samozřejmě dvojnásobná

$$\triangle d_2 = 2\,\triangle r_2. \tag{20}$$