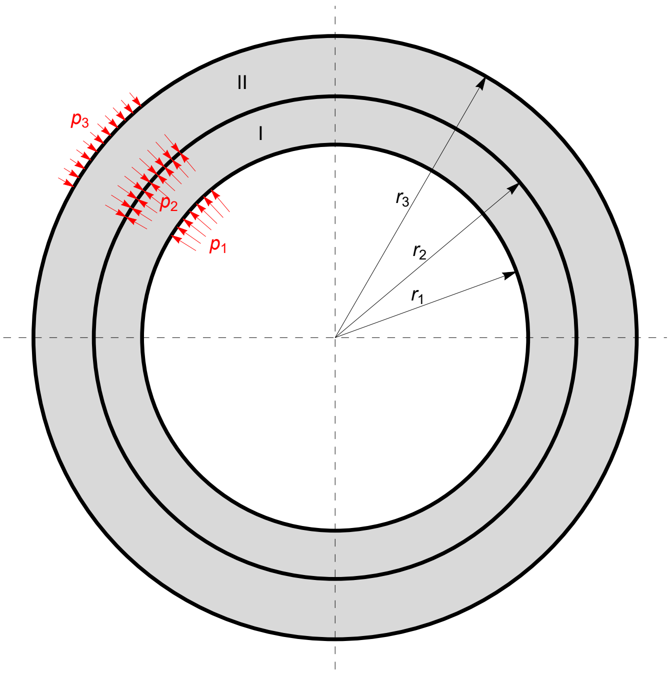
Nalisovaná silnostěnná válcová tlaková nádoba 2

Přesah v nalisování

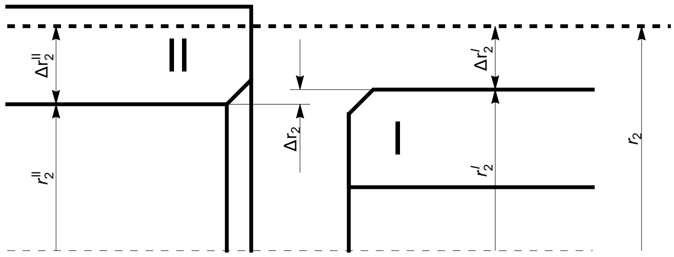
Zadání



Silnostěnná nalisovaná válcová tlaková nádoba s poloměry r_1 a r_3 (viz obrázek) je zatížena vnitřním tlakem p_1.

Určete: přesah v nalisování tak, aby nádoba vydržela maximální přetlak

Obecné řešení



Vnitřní nádoba I, vnější nádoba II. Stav před nalisováním.
Po nalisování a natlakování se oba poloměry dostanou
na čárkovaně vyznačenou pozici.

Na obrázku vidíme stav před nalisováním. Přesah v nalisování je Δr_2. Poté, co nádoby na sebe nalisujeme a zatížíme tlakem, poloměr r_2 už bude pro obě společný. Jeho hodnota je vyznačená silnou čárkovanou čarou.
Pro kóty z obrázku vidíme platnost následující vztah

$$\Delta r_2 + \Delta r_2^{I} = \Delta r_2^{II}. \tag{1}$$

Vezmeme-li v úvahu, že deformace nádoby během nalisování a tlakování jsou velmi malé (ve srovnání s rozměry nádoby), pak můžeme napsat

$$r_2 \doteq r_2^{I} \doteq r_2^{II}. \tag{2}$$

První rovnici dělíme r_2 (resp. r_2^I, resp. r_2^{II}) a dostáváme

$$\frac{\Delta r_2}{r_2} = \frac{\Delta r_2^{II}}{r_2^{II}} - \frac{\Delta r_2^{I}}{r_2^{I}}, \tag{3}$$

neboli

$$\frac{\Delta r_2}{r_2} = \varepsilon_{t2}^{II} - \varepsilon_{t2}^{I}. \tag{4}$$

Budeme předpokládat, že nádoba je otevřená (axiální napětí je nulové), a tečné poměrné deformace můžeme pak vyjádřit pomocí Hookova zákona. Mají tvar

$$\varepsilon_{t2}^{I} = \frac{1}{\mathbb{E}} \left(\sigma_{t2}^{I} - \mu\, \sigma_{r2}^{I}\right), \tag{5}$$

$$\varepsilon_{t2}^{II} = \frac{1}{\mathbb{E}} \left(\sigma_{t2}^{II} - \mu\, \sigma_{r2}^{II}\right). \tag{6}$$

Radiální napětí na poloměru 2 je rovno zápornému tlaku v nalisování $-p_2$. Platí proto

$$\varepsilon_{t2}^{I} = \frac{1}{\mathbb{E}} \left(\sigma_{t2}^{I} + \mu\, p_2\right), \tag{7}$$

$$\varepsilon_{t2}^{II} = \frac{1}{\mathbb{E}} \left(\sigma_{t2}^{II} + \mu\, p_2\right). \tag{8}$$

Oba vztahy dosadíme do vztahu (4) a dostáváme

$$\frac{\triangle r_2}{r_2} = \frac{1}{\mathbb{E}} \left(\left(\sigma_{t2}^{II} + \mu\, p_2 \right) - \left(\sigma_{t2}^{I} + \mu\, p_2 \right) \right) \tag{9}$$

neboli

$$\triangle r_2 = \frac{r_2}{\mathbb{E}} \left(\sigma_{t2}^{II} - \sigma_{t2}^{I} \right). \tag{10}$$

Upravujme vztah pro σ_{t2}^{I}. Postupně dostáváme tvary

$$\begin{aligned}
\sigma_{t2}^{I} &= A^{I} + \frac{B^{I}}{r_2^2} = \\
&= \frac{p_1\, r_1^2 - p_2\, r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(p_1 - p_2)\, \frac{r_1^2\, r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}}{r_2^2} = \\
&= \frac{p_1\, r_1^2 - p_2\, r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + (p_1 - p_2)\, \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = \\
&= \frac{p_1\, r_1^2 - p_2\, r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{p_1\, r_1^2 - p_2\, r_1^2 + p_2\, r_2^2 - p_2\, r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \\
&= \frac{p_1\, r_1^2 - p_2\, r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{p_1\, r_1^2 - p_2\, r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{-p_2\, r_1^2 + p_2\, r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \\
&= \frac{p_1\, r_1^2 - p_2\, r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{p_1\, r_1^2 - p_2\, r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{p_2 \left(r_2^2 - r_1^2 \right)}{r_2^2 - r_1^2} = \\
&= 2\, \frac{p_1\, r_1^2 - p_2\, r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + p_2 = \\
&= 2\, A^{I} + p_2.
\end{aligned}$$

První a poslední tvar předcházející sady úprav tedy dávají rovnici

$$\sigma_{t2}^{I} = 2\, A^{I} + p_2. \tag{11}$$

Zcela analogickým postupem dostaneme rovnici

$$\sigma_{t2}^{II} = 2\, A^{II} + p_2. \tag{12}$$

Z těchto vztahů dosadíme do vztahu pro přesah Δr_2 a dostáváme

$$\triangle r_2 = \frac{r_2}{\mathbb{E}} \left(2\, A^{II} + p_2 - \left(2\, A^{I} + p_2 \right) \right), \tag{13}$$

neboli

$$\triangle r_2 = \frac{2\, r_2}{\mathbb{E}} \left(A^{II} - A^{I} \right). \tag{14}$$

Příklad

Zadání

Nalisovaná nádoba má dán vnitří a vnější poloměr a dovolené napětí. Vnější tlak p_3 bude nulový.

$$\begin{aligned} r_1 &= 200\ \text{mm} \\ r_3 &= 310\ \text{mm} \\ \sigma_D &= 140\ \text{MPa} \\ \mathbb{E} &= 210000.\ \text{MPa} \end{aligned}$$

Určete maximální únosnost nádoby, poloměr r_2 a přesah v nalisování.

Řešení

Víme, že optimální poloměr r_2 má velikost

$$r_2 = \sqrt{r_1 r_3}\,, \tag{15}$$

což dává hodnotu

$$r_1 = 248.998\ \text{mm}. \tag{16}$$

Víme také, že optimální nádoba přenese přetlak

$$p_1 - p_3 = \sigma_D \left(1 - \frac{r_1}{r_3}\right), \tag{17}$$

což dává hodnotu

$$p_1 = 49.6774\ \text{MPa}. \tag{18}$$

Vnitřní nádoba v optimální nalisované nádobě splňuje pevnostní podmínku

$$p_1 - p_2 = \frac{\sigma_D}{2} \left(1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right). \tag{19}$$

Odsud snadno určíme tlak v nalisování p_2:

$$p_2 = p_1 - \frac{\sigma_D}{2} \left(1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right), \tag{20}$$

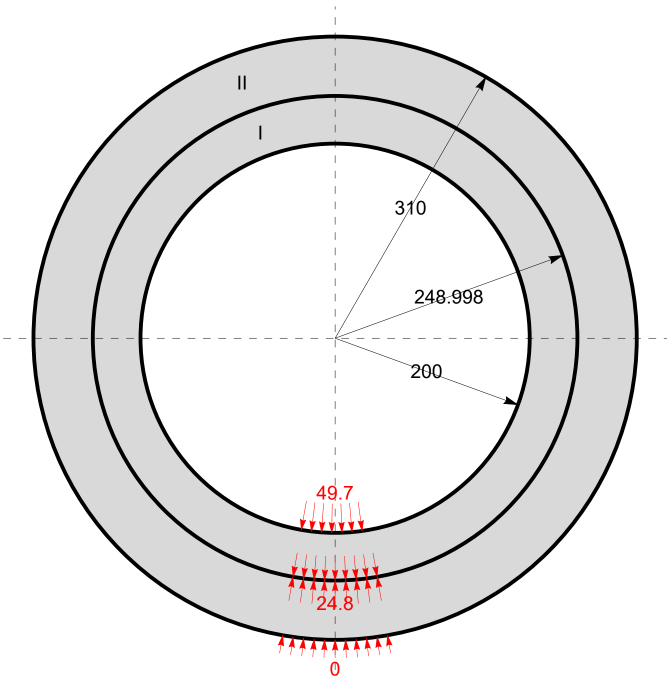
což číselně dává

$$p_2 = 24.8387\ \text{MPa}. \tag{21}$$

Dostali jsme se tedy do stavu, kdy známe všechny tři poloměry a všechny tři tlaky:

$$\begin{aligned} r_1 &= 200\ \text{mm}, \\ r_2 &= 248.998\ \text{mm}, \\ r_3 &= 310\ \text{mm}, \\ p_1 &= 49.6774\ \text{MPa}, \end{aligned}$$

$$p_2 = 24.8387 \text{ MPa},$$
$$p_3 = 0 \text{ MPa}.$$



Určíme nyní hodnoty A^I a A^{II}:

$$A^I = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = 20.3226 \text{ MPa}, \tag{22}$$

$$A^{II} = \frac{p_2 r_2^2 - p_3 r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} = 45.1613 \text{ MPa}. \tag{23}$$

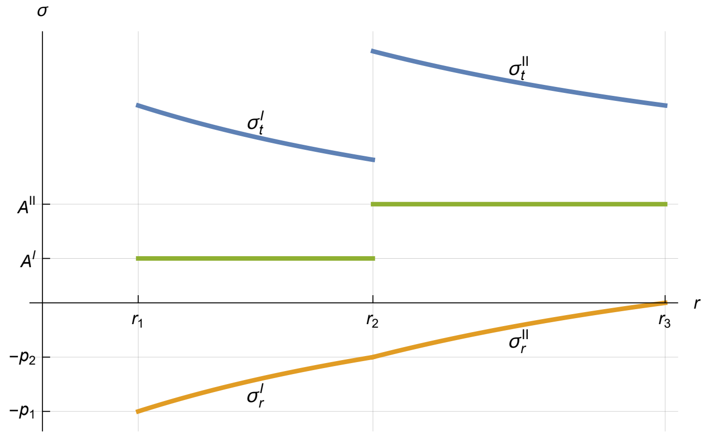
Tyto hodnoty dosadíme je do obecného vztahu pro přesah

$$\triangle r_2 = \frac{2 r_2}{\mathbb{E}} \left(A^{II} - A^I \right) \tag{24}$$

a dostaneme velikost přesahu

$$\triangle r_2 = 0.0589028 \text{ mm}. \tag{25}$$

Průběh napětí ve stěně nalisované nádoby



Průběh ekvivalentního napětí ve stěně nalisované nádoby