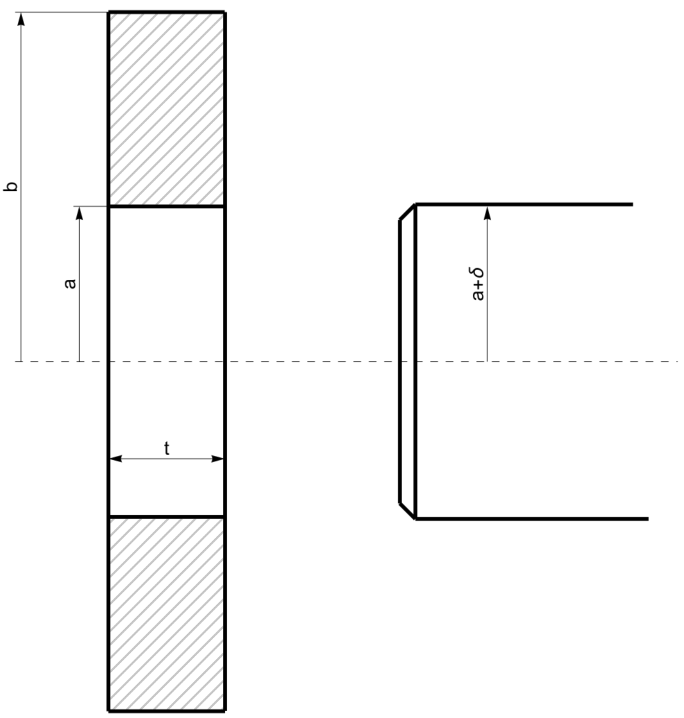
Nalisovaný spoj

Zadání



Do objímky s poloměry a a b nalisujeme čep o poloměru $a + \delta$ (viz obrázek). Přesah poloměru δ je velmi malý ($\delta \ll a$).
Určete velikost tlaku p mezi čepem a objímkou, který vznikne po nalisování.

Řešení

V nalisování vznikne (zatím neznámý) tlak p a v čepu i v objímce vzniknou napětí. Pro tato napětí platí

$$\sigma_t^{čep} = A^{čep} + \frac{B^{čep}}{r^2}, \tag{1}$$

$$\sigma_r^{čep} = A^{čep} - \frac{B^{čep}}{r^2}, \tag{2}$$

$$\sigma_t^{obj} = A^{obj} + \frac{B^{obj}}{r^2}, \tag{3}$$

$$\sigma_r^{obj} = A^{obj} - \frac{B^{obj}}{r^2}. \tag{4}$$

Čep

Je evidentní, že ve skutečnosti napětí v čepu nepůjde v blízkosti osy k nekonečnu. To je možné jen tehdy, když $B^{čep} = 0$.
Pro čep tedy platí, že obě napětí jsou konstantní:

$$\sigma_t^{čep} = A^{čep}, \tag{5}$$

$$\sigma_r^{čep} = A^{čep}. \tag{6}$$

Radiální napětí v čepu na poloměru a (tj. v nalisování) je rovno $-p$, takže platí

$$\sigma_t^{čep} = \sigma_r^{čep} = -p. \tag{7}$$

Tečná poměrná deformace v čepu na poloměru a je podle Hookova zákona

$$\varepsilon_{t\_a}^{čep} = \frac{1}{\mathbb{E}} \left(\sigma_{t\_a}^{čep} - \mu\, \sigma_{r\_a}^{čep}\right) \tag{8}$$

neboli

$$\varepsilon_{t\_a}^{čep} = \frac{1}{\mathbb{E}} \left(-p - \mu\, (-p)\right), \tag{9}$$

$$\varepsilon_{t\_a}^{čep} = -\frac{p}{\mathbb{E}} (1 - \mu). \tag{10}$$

Změna poloměru čepu pak vychází

$$\Delta a^{čep} = a\, \varepsilon_{t\_a}^{čep} \tag{11}$$

neboli

$$\Delta a^{čep} = -\frac{p\, a}{\mathbb{E}} (1 - \mu). \tag{12}$$

Objímka

Tlak v okolí nalisovaného spoje je atmosférický a budeme ho považovat za přibližně nulový. Pro napětí v objímce platí následující vztahy:

$$\sigma_t^{obj} = A^{obj} + \frac{B^{obj}}{r^2}, \tag{13}$$

$$\sigma_r^{obj} = A^{obj} - \frac{B^{obj}}{r^2}. \tag{14}$$

Pro konstanty A^{obj} a B^{obj} platí známé vztahy

$$A^{obj} = \frac{p\, a^2}{b^2 - a^2}, \tag{15}$$

$$B^{obj} = p\, \frac{a^2\, b^2}{b^2 - a^2}. \tag{16}$$

Tečná poměrná deformace v objímce na poloměru *a* je podle Hookova zákona

$$\varepsilon_{t\_a}^{obj} = \frac{1}{\mathbb{E}} \left(\sigma_{t\_a}^{obj} - \mu\, \sigma_{r\_a}^{obj}\right). \tag{17}$$

Radiální napětí v objímce na poloměru *a* je $-p$, takže můžeme napsat

$$\varepsilon_{t\_a}^{obj} = \frac{1}{\mathbb{E}} \left(\sigma_{t\_a}^{obj} + \mu\, p\right). \tag{18}$$

Za těčné napětí dosadíme a dostáváme

$$\varepsilon_{t\_a}^{obj} = \frac{1}{\mathbb{E}} \left(A^{obj} + \frac{B^{obj}}{a^2} + \mu\, p\right), \tag{19}$$

a po dosazení za A^{obj} a B^{obj} máme

$$\varepsilon_{t\_a}^{obj} = \frac{1}{\mathbb{E}} \left(\frac{p\, a^2}{b^2 - a^2} + p\, \frac{b^2}{b^2 - a^2} + \mu\, p\right), \tag{20}$$

neboli

$$\varepsilon_{t\_a}^{obj} = \frac{p}{\mathbb{E}} \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} + \mu\right). \tag{21}$$

Změna poloměru objímky je dána vztahem

$$\triangle a^{obj} = a\, \varepsilon_{t\_a}^{obj}. \tag{22}$$

Po dosazení za $\varepsilon_{t\_a}^{obj}$ dostaneme

$$\triangle a^{obj} = \frac{p\, a}{\mathbb{E}} \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} + \mu\right). \tag{23}$$

Deformační rovnice

Jak vidíme na vztahu pro $\triangle a^{čep}$, je to veličina je záporná. To znamená, že poloměr čepu se po nalisování zmenší. Veličina $\triangle a^{obj}$ je kladná, poloměr otvoru v objímce se zvětší. Součet *velikostí* těchto dvou veličin musí být roven přesahu poloměru. To zapíšeme takto

$$\left|\triangle a^{čep}\right| + \triangle a^{obj} = \delta, \tag{24}$$

neboli

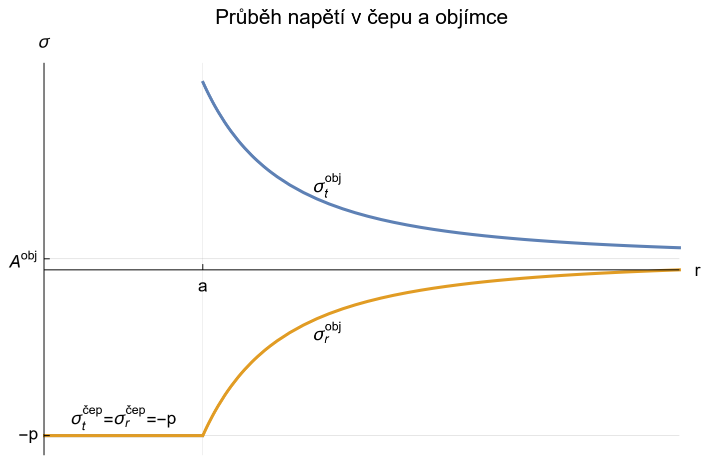
$$-\triangle a^{čep} + \triangle a^{obj} = \delta. \tag{25}$$

Za obě veličiny dosadíme a dostaneme vztah

$$\frac{p\,a}{\mathbb{E}}\,(1-\mu)+\frac{p\,a}{\mathbb{E}}\left(\frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}+\mu\right)=\delta. \tag{26}$$

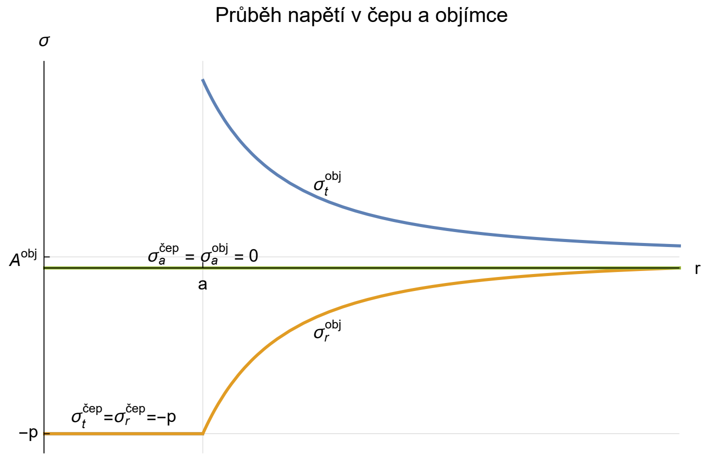
Z tohoto vztahu vyjáříme velikost tlaku v nalisování a dostaneme

$$p=\mathbb{E}\,\delta\,\frac{b^2-a^2}{2\,a\,b^2}. \tag{27}$$



Pevnostní kontrola

Umíme-li spočítat tlak v nalisování pro daný přesah, neznamená to, že tam takový tlak doopravdy bude. Může se totiž stát, že napětí v objímce nebo v čepu dosáhne meze kluzu. V takovém případě přestane platit Hookův zákon a naše výpočty nebudou správně.
Proto je třeba výsledek pevnostně zkontrolovat.
Když si uvědomíme, že v čepu i v objímce je nulové osové napětí, můžeme si ho doplnit do grafu.



V čepu je σ_a první hlavní napětí a σ_t a σ_r jsou druhé a třetí hlavní napětí.
V objímce je σ_t první hlavní napětí , σ_a druhé hlavní napětí a σ_r třetí hlavní napětí.
Při pohledu na graf je jasné, že nejvetší ekvivalentní napětí je v objímce na poloměru a. Objímka je tlaková nádoba a můžeme proto použít pevnostní podmínku tak, jak ji známe u nádob:

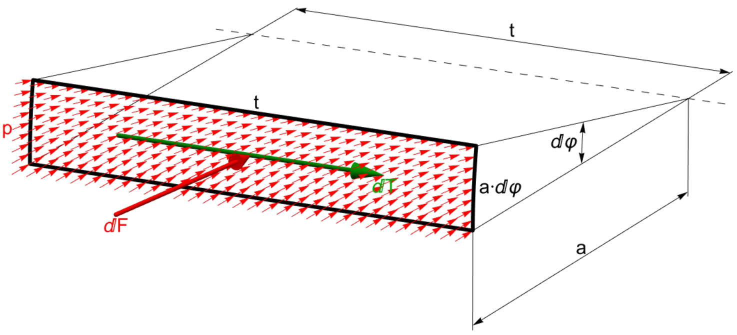
$$p < \frac{\sigma_k}{2}\left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2\right). \tag{28}$$

Dosadíme za tlak a pro přesah dostaneme nerovnost

$$\delta < \frac{a\,\sigma_k}{\mathbb{E}}. \tag{29}$$

Toto je tedy podmínka, která zajistí, že napětí v nalisovaných dílech nepdosáhne meze kluzu.

Síla potřebná pro nalisování



Na obrázku vidíme část kontaktní plochy mezi čepem a objímkou. Velikost síly *d*F je

$$\mathrm{d}F = p\,t\,a\,\mathrm{d}\varphi. \tag{30}$$

Při nalisovávání se tento segment (spolu se všemi ostatními) osově posunuje a vzniká třecí síla

$$\mathrm{d}T = f_t\,p\,t\,a\,\mathrm{d}\varphi. \tag{31}$$

Celková třecí síla (a tedy i síla potřebná k nalisování) je rovna

$$T = \int_{\{S\}} \mathrm{d}T, \tag{32}$$

neboli

$$T = \int_0^{2\pi} f_t\,p\,t\,a\,\mathrm{d}\varphi, \tag{33}$$

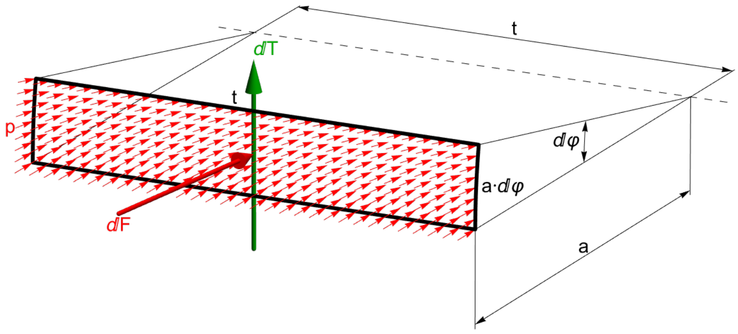
což dává

$$T = f_t\,p\,t\,a\,2\pi. \tag{34}$$

Po dosazení za tlak p dostaneme tvar

$$T = \delta\,\mathbb{E}\,f_t\,\frac{\pi\left(b^2 - a^2\right)t}{b^2}. \tag{35}$$

Moment, který může nalisování přenášet



Na obrázku vidíme část kontaktní plochy mezi čepem a objímkou. Velikost síly *d*F je

$$dF = p\, t\, a\, d\varphi. \tag{36}$$

Když se začne objímka na čepu protáčet, bude velikost třecí síly v tomto segmetu rovna

$$dT = f_t\, p\, t\, a\, d\varphi. \tag{37}$$

Moment od této třecí síly bude mít velikost

$$dM = a\, dT = f_t\, p\, t\, a^2\, d\varphi. \tag{38}$$

Celkový moment způsobený třecími silami je potom

$$M = \int_{\{S\}} dM, \tag{39}$$

neboli

$$M = \int_0^{2\pi} f_t\, p\, t\, a^2\, d\varphi, \tag{40}$$

což dává

$$M = f_t\, p\, t\, a^2\, 2\pi. \tag{41}$$

Po dosazení za tlak p dostaneme tvar

$$M = \delta\, \mathbb{E}\, f_t\, \frac{\pi\left(b^2 - a^2\right) a\, t}{b^2}. \tag{42}$$

Tento moment odpovídá situaci, že se objímka na čepu protáčí. Tomu však v provozu chceme zabránit a provozní moment proto musí být menší:

$$M_{\text{provozní}} < \delta\, \mathbb{E}\, f_t\, \frac{\pi\left(b^2 - a^2\right) a\, t}{b^2}. \tag{43}$$