Čep nalisovaný do velké desky

Zadání

Čep je nalisovaný do otvoru ve velké desce.

Dáno: $\mathbb{E}$, μ, poloměr nalisování R, požadovaný tlak v nalisování p

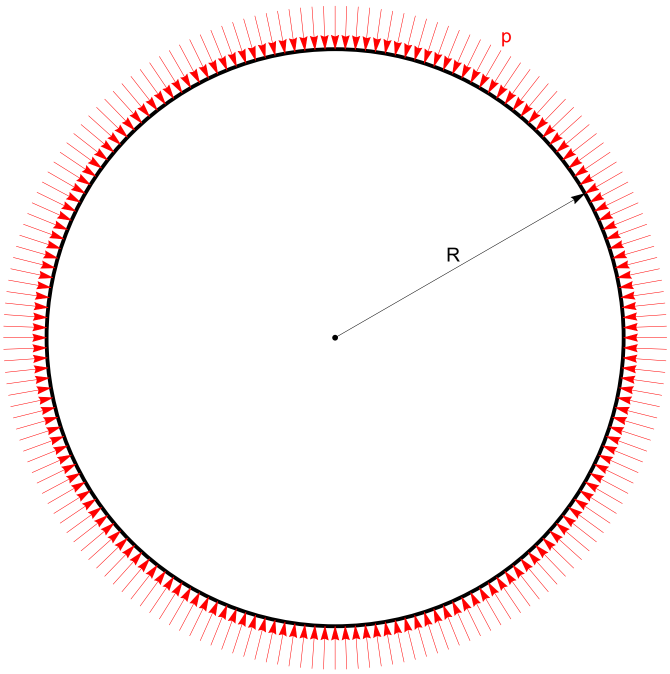
Určete: Potřebný přesah nalisování

Řešení

Deska je velká a ve srovnání s čepem prakticky nekonečná. Čep je plný a nemá tedy vnitřní poloměr.
Připravíme si nejprve vztahy pro napětí pro tyto dva zvláštní případy.

Napětí v čepu

Jedná se o plný válec, který je na vnějším povrchu zatížen tlakem v nalisování p



Zapišme si známé vztahy pro napětí:

$$\sigma_t = A + \frac{B}{r^2}, \tag{1}$$

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2}. \tag{2}$$

V případě plného válce začíná r už na hodnotě 0. To by znamenalo, že napětí v ose čepu budou nekonečná. Dobře však víme, že tomu tak není. Z toho plyne jediný způsob, jak zajistit, aby napětí skutečně nebyla nulová. Je to

$$B = 0. \tag{3}$$

Pro napětí tedy platí

$$\sigma_t = A, \tag{4}$$

$$\sigma_r = A. \tag{5}$$

Z okrajové podmínky

$$\sigma_r\ (R) = -p \tag{6}$$

plyne hodnota A

$$A = -p \tag{7}$$

a napětí tedy jsou

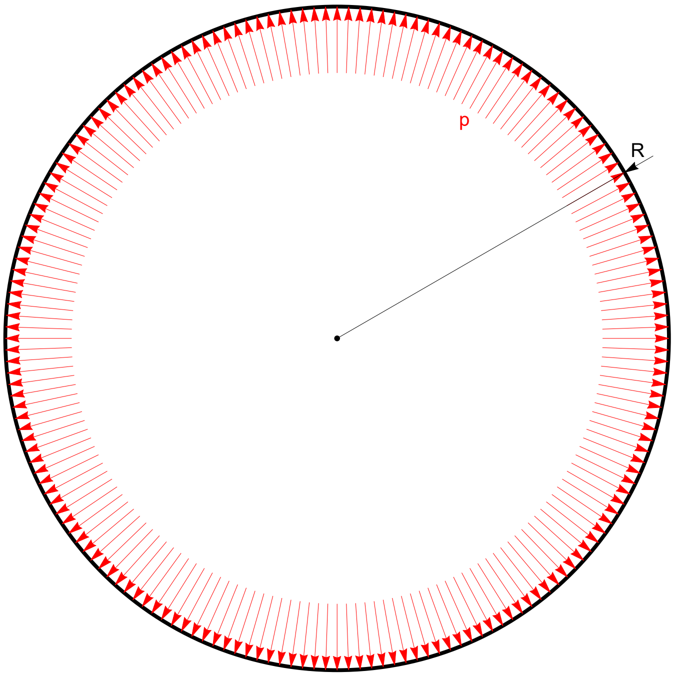
$$\sigma_t = -p, \tag{8}$$

$$\sigma_r = -p. \tag{9}$$

S ohledem na to, že se jedná o (rovinný) všestranný tlak, neměl by nás výsledek příliš překvapit.

Napětí v desce

Jedná se o desku s otvorem. Ten je na povrchu zatížen tlakem v nalisování p



Zapišme si známé vztahy pro napětí:

$$\sigma_t = A + \frac{B}{r^2}, \tag{10}$$

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2}. \tag{11}$$

Hodnoty konstant A a B mají v tomto případě specifický tvar, protože vnější poloměr limituje k nekonečnu: $r_2 \to \infty$.

$$A_\infty = \lim_{r_2 \to \infty} \left(\frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right), \tag{12}$$

$$B_\infty = \lim_{r_2 \to \infty} \left((p_1 - p_2) \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right). \tag{13}$$

Upravujme vztah pro A_∞:

$$A_\infty = \lim_{r_2 \to \infty} \left(\frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right)$$

$$A_\infty = \lim_{r_2\to\infty}\left(\frac{r_2^2\left(p_1\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - p_2\right)}{r_2^2\left(1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right)}\right)$$

$$A_\infty = \lim_{r_2\to\infty}\left(\frac{\left(p_1\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - p_2\right)}{\left(1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right)}\right)$$

$$A_\infty = -p_2.$$

Upravujme vztah pro B_∞:

$$B_\infty = \lim_{r_2\to\infty}\left((p_1-p_2)\,\frac{r_1^2\,r_2^2}{r_2^2-r_1^2}\right)$$

$$B_\infty = \lim_{r_2\to\infty}\left((p_1-p_2)\,\frac{r_1^2\,r_2^2}{r_2^2\left(1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right)}\right)$$

$$B_\infty = (p_1-p_2)\,r_1^2.$$

Budeme-li okolní tlak považovat za zanedbatelně malý, zjednoduší se vztahy pro konstanty A_∞ a B_∞ na tvar

$$A_\infty = 0, \tag{14}$$

$$B_\infty = p_1\,R_1^2. \tag{15}$$

Dosadíme konstanty do vztahů pro napětí. Za r_1 dosadíme náš zadaný poměr R a dostáváme

$$\sigma_t = p_1\left(\frac{R}{r}\right)^2, \tag{16}$$

$$\sigma_r = -p_1\left(\frac{R}{r}\right)^2. \tag{17}$$

Jedná se o dvě polytropy symetrické vzhledem k ose r, které pro $r \to \infty$ limitují k nule.

Deformační rovnice

Při nalisování dojde k tomu, že se poloměr otvoru v desce zvětší, zatímco poloměr čepu se zmenší. Součet *velikostí* těchto změn je roven přesahu ΔR.

$$\Delta R = \left|\Delta R^{\text{čep}}\right| + \Delta R^{\text{deska}}. \tag{18}$$

Pro změny poloměru čepu a otvoru v desce platí známé vztahy

$$\Delta R^{\text{čep}} = R\,\varepsilon_{t\_R}^{\text{čep}}, \tag{19}$$

$$\Delta R^{\text{deska}} = R\,\varepsilon_{t\_R}^{\text{deska}}. \tag{20}$$

Za poměrné deformace můžeme dosadit z Hookova zákona

$$\varepsilon_{t\_R}^{\text{čep}} = \frac{1}{\mathbb{E}}\left(\sigma_{t\_R}^{\text{čep}} - \mu\,\sigma_{r\_R}^{\text{čep}}\right), \tag{21}$$

$$\varepsilon_{t\_R}^{\text{deska}} = \frac{1}{\mathbb{E}}\left(\sigma_{t\_R}^{\text{deska}} - \mu\,\sigma_{r\_R}^{\text{deska}}\right). \tag{22}$$

Za napětí dosadíme , co jsme pro čep a desku odvodili výše a dostaneme

$$\varepsilon_{t\_R}^{\check{c}ep} = -\frac{p}{\mathbb{E}} \left(1 - \mu\right), \tag{23}$$

$$\varepsilon_{t\_R}^{deska} = \frac{p}{\mathbb{E}} \left(1 - \mu\right). \tag{24}$$

Po dosazení do deformační rovnice dostaneme potřebnou velikost přesahu

$$\triangle R = \frac{2\, p\, R}{\mathbb{E}} \left(1 - \mu\right). \tag{25}$$