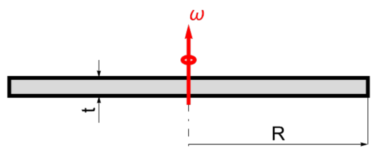
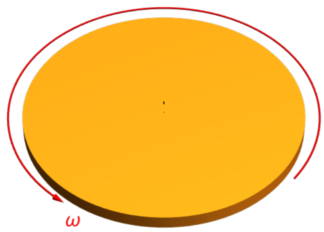
Volně rotující plný kotouč

Zadání





Kotouč volně rotuje.
Dáno: R, t, ρ, ω
Určete: Napětí v kotouči, deformace ΔR

Řešení

Napětí

Pro napětí platí vztahy

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} - \frac{3+\mu}{8}\,\rho\,\omega^2\,r^2, \tag{1}$$

$$\sigma_t = A + \frac{B}{r^2} - \frac{1+3\,\mu}{8}\,\rho\,\omega^2\,r^2. \tag{2}$$

Konstanty A a B určíme z okrajových podmínek:
Protože ve středu kotouče (když $r \to 0$) napětí nepochybně neroste nade všechny meze, znamená to, že pro konstantu B musí platit

$$B = 0. \tag{3}$$

Hodnotu B můžeme určit i jinou úvahou: Ve středu kotouče nelze rozlišit tečný a radiální směr. Každá přímka která středem prochází, je totiž jak radiálou, tak tečnou ke středu. Nemůžeme-li tedy rozlišit radiální a tečný směr, nemůžeme ani rozlišit radiální a tečné napětí. Musejí proto být shodná. Pohled na vztahy pro σ_r a σ_t ukazuje, že pro $r \to 0$ budou napětí shodná jen tehdy, když

$$B = 0. \tag{4}$$

Na poloměru *R* je radiální napětí rovno nule:

Dosadíme do vztahu (1) a dostaneme

$$0 = A - \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 R^2, \tag{6}$$

a tedy

$$A = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 R^2. \tag{7}$$

Konstanty A a B dosadíme do vztahů pro napětí a dostaneme

$$\sigma_r = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 R^2 - \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 r^2, \tag{8}$$

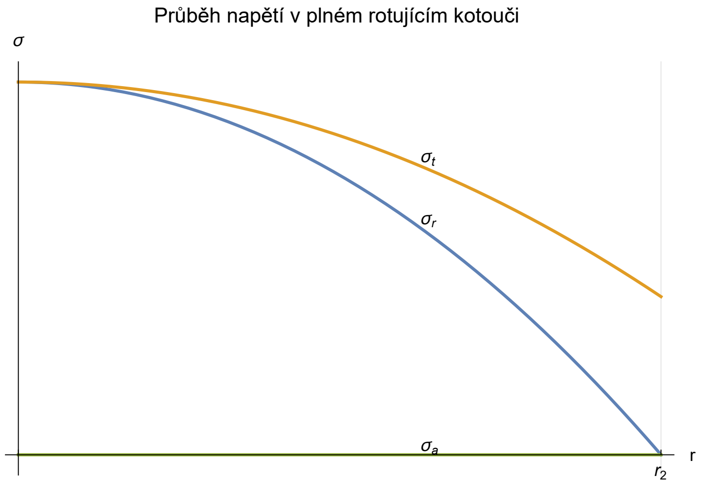
$$\sigma_t = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 R^2 - \frac{1+3\mu}{8} \rho \omega^2 r^2. \tag{9}$$

Vztahy upravíme do následující podoby

$$\sigma_r = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 R^2 \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right), \tag{10}$$

$$\sigma_t = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 R^2 \left(1 - \frac{1+3\mu}{3+\mu} \left(\frac{r}{R}\right)^2\right). \tag{11}$$

Jedná se o funkce proměnné r. Průběh napětí je tedy parabola $\frac{1}{R^2}\ r^2$. V případě tečného napětí je parabola vynásobená zlomkem $\frac{1+3\mu}{3+\mu}$. S ohledem na to, že pro μ musí platit $0 \le \mu \le 0.5$, tak pro zlomek $\frac{1+3\mu}{3+\mu}$ platí $\frac{1+3\mu}{3+\mu} < 1$.



Ekvivalentní napětí podle hypotézy τ_{max} je rovno rozdílu největšího a nejmenšího hlavního napětí, takže platí

$$\sigma_{ekvMax} = \sigma_t(0) = \sigma_r(0) = A \tag{12}$$

a tedy

$$\sigma_{ekvMax} = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 R^2. \tag{13}$$

Po dosazení za konstanty A a B máme

$$\frac{3+\mu}{8}\,\rho\,\omega^2\,R^2 \le \sigma_D. \tag{14}$$

Deformace

Pro změnu poloměru platí

$$\triangle R = \varepsilon_t\,(R)\;R. \tag{15}$$

Hodnotu tečné poměrné deformace získáme pomocí Hookova zákona

$$\varepsilon_t\,(R) = \frac{1}{\mathbb{E}}\,(\sigma_t\,(R) - \mu\,(\sigma_r\,(R) + \sigma_a\,(R))). \tag{16}$$

Vzhledem k tomu, že radiální napětí na poloměru R je nulové, tak

$$\varepsilon_t\,(R) = \frac{\sigma_t\,(R)}{\mathbb{E}}, \tag{17}$$

Po dosazení dostaneme

$$\triangle R = \frac{R^3\,(1-\mu)\,\rho\,\omega^2}{4\,\mathbb{E}}. \tag{18}$$