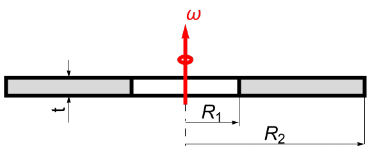
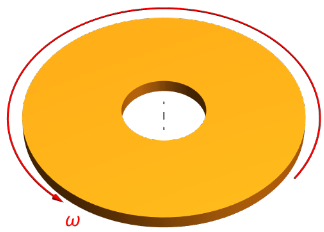
Volně rotující kotouč s otvorem

Zadání





Kotouč volně rotuje.
Dáno: R_1, R_2, t, ρ, ω
Určete: Napětí v kotouči, deformace ΔR_1 a ΔR_2

Řešení

Napětí

Pro napětí platí vztahy

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} - \frac{3+\mu}{8}\rho\,\omega^2\,r^2, \tag{1}$$

$$\sigma_t = A + \frac{B}{r^2} - \frac{1+3\mu}{8}\rho\,\omega^2\,r^2. \tag{2}$$

Konstanty A a B určíme z okrajových podmínek:
Na poloměru R_1 je radiální napětí rovno zápornému tlaku p_1. Ten je ale podle zadání nulový, takže

$$\sigma_{r1} = 0. \tag{3}$$

Na poloměru R_2 je radiální napětí rovno zápornému tlaku p_2. Ten je ale podle zadání nulový, takže

$$\sigma_{r2} = 0. \tag{4}$$

Z okrajové podmínky dosadíme do vztahu pro radiální napětí a dostaneme

$$0 = A - \frac{B}{R_1^2} - \frac{3+\mu}{8}\,\rho\,\omega^2\,R_1^2, \tag{5}$$

$$0 = A - \frac{B}{R_2^2} - \frac{3+\mu}{8}\,\rho\,\omega^2\,R_2^2. \tag{6}$$

Poslední dva vztahy představují dvě rovnice pro dvě neznámé konstanty A a B. Konstantu B získáme např. tak, že první rovnici násobíme (-1) a přičteme ke druhé rovnici. Když pak členy s konstantou B převedeme nalevo, dostaneme

$$\frac{B}{R_2^2} - \frac{B}{R_1^2} = \frac{3+\mu}{8}\,\rho\,\omega^2\,R_1^2 - \frac{3+\mu}{8}\,\rho\,\omega^2\,R_2^2. \tag{7}$$

Další sada úprav nás dovede k B:

$$B\left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2}\right) = \frac{3+\mu}{8}\,\rho\,\omega^2\,\left(R_1^2 - R_2^2\right),$$

$$B\,\frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^2\,R_2^2} = \frac{3+\mu}{8}\,\rho\,\omega^2\,\left(R_1^2 - R_2^2\right),$$

$$B\,\frac{1}{R_1^2\,R_2^2} = \frac{3+\mu}{8}\,\rho\,\omega^2,$$

$$B = \frac{3+\mu}{8}\,\rho\,\omega^2\,R_1^2\,R_2^2 \tag{8}$$

B dosadíme do rovnice (5) a vyjádříme A:

$$A = \frac{3+\mu}{8}\,\rho\,\omega^2\,\left(R_1^2 + R_2^2\right) \tag{9}$$

Konstanty A a B dosadíme do vztahů pro napětí a dostaneme

$$\sigma_r = \frac{3+\mu}{8}\,\rho\,\omega^2\,\left(R_1^2 + R_2^2\right) - \frac{3+\mu}{8}\,R_1^2\,R_2^2\,\rho\,\omega^2\,\frac{1}{r^2} - \frac{3+\mu}{8}\,\rho\,\omega^2\,r^2, \tag{10}$$

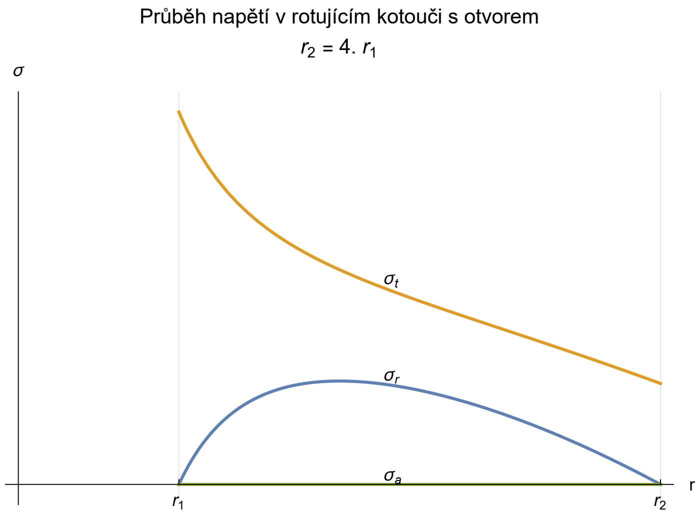
$$\sigma_t = \frac{3+\mu}{8}\,\left(R_1^2 + R_2^2\right)\,\rho\,\omega^2 + \frac{3+\mu}{8}\,R_1^2\,R_2^2\,\rho\,\omega^2\,\frac{1}{r^2} - \frac{1+3\mu}{8}\,\rho\,\omega^2\,r^2. \tag{11}$$

Vztahy upravíme do následující podoby

$$\sigma_r = \frac{3+\mu}{8}\,\rho\,\omega^2\,R_2^2\left(1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 - \left(\frac{R_1}{r}\right)^2 - \left(\frac{r}{R_2}\right)^2\right), \tag{12}$$

$$\sigma_t = \frac{3+\mu}{8}\,\rho\,\omega^2\,R_2^2\left(1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{R_1}{r}\right)^2 - \frac{1+3\mu}{3+\mu}\,\left(\frac{r}{R_2}\right)^2\right). \tag{13}$$

Jedná se o funkce proměnné r. Ve vztazích pro napětí se r vyskytuje ve zlomcích $\frac{R_1}{r}$ a $\frac{r}{R_2}$. Průběh napětí je tedy součtem konstanty, polytopy $R_1^2\,\frac{1}{r^2}$ a paraboly $\frac{1}{R_2^2}\,r^2$. V případě tečného napětí je parabola vynásobená zlomkem $\frac{1+3\mu}{3+\mu}$. S ohledem na to, že pro μ musí platit $0 \le \mu \le 0.5$, tak pro zlomek platí $\frac{1+3\mu}{3+\mu} < 1$.



Ekvivalentní napětí podle hypotézy τ_{max} je rovno rozdílu největšího a nejmenšího hlavního napětí, takže platí

$$\sigma_{ekvMax} = \sigma_{t1} \tag{14}$$

a tedy

$$\sigma_{ekvMax} = A + \frac{B}{R_1^2} - \frac{1+3\mu}{8} \rho \omega^2 R_1^2. \tag{15}$$

Po dosazení za konstanty A a B máme

$$\sigma_{ekvMax} = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 R_2^2 \left(2 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \left(1 - \frac{1+3\mu}{3+\mu}\right)\right) \tag{16}$$

a pevnostní podmínka má tedy tvar

$$\frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 R_2^2 \left(2 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \left(1 - \frac{1+3\mu}{3+\mu}\right)\right) \leq \sigma_D. \tag{17}$$

Deformace

Pro změny poloměrů platí

$$\Delta R_1 = \varepsilon_{t1} R_1, \tag{18}$$

$$\Delta R_2 = \varepsilon_{t2} R_2. \tag{19}$$

Hodnoty tečných poměrných deformací získáme pomocí Hookova zákona

$$\varepsilon_{t1} = \frac{1}{\mathbb{E}} (\sigma_{t1} - \mu (\sigma_{r1} + \sigma_{a1})), \tag{20}$$

$$\varepsilon_{t2} = \frac{1}{\mathbb{E}} (\sigma_{t2} - \mu (\sigma_{r2} + \sigma_{a2})). \tag{21}$$