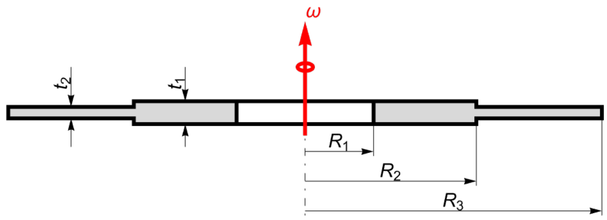
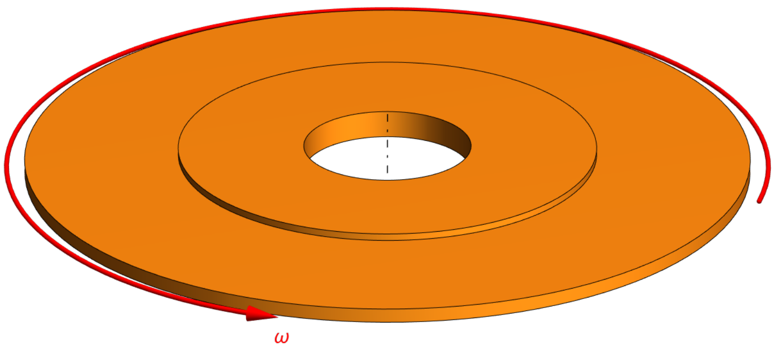
Volně rotující kotouč s otvorem a proměnnou tloušťkou

Zadání





Kotouč volně rotuje.
Dáno: R_1, R_2, R_3, t_1, t_2, ρ, ω
Určete: Napětí v kotouči

Řešení

Problém budeme řešit jako dva kotouče, spojené na poloměru R_2.

Kotouče označíme I a II. Platí pro ně

$$\mathrm{I}: r \in \langle R_1, R_2 \rangle, \tag{1}$$

$$\mathrm{II}: r \in \langle R_2, R_3 \rangle. \tag{2}$$

Zapíšeme si teď vztahy pro napětí v kotoučích:

$$\sigma_r^{I} = A^{I} - \frac{B^{I}}{r^2} - \frac{3+\mu}{8}\,\rho\,\omega^2\,r^2, \tag{3}$$

$$\sigma_t^{I} = A^{I} + \frac{B^{I}}{r^2} - \frac{1+3\,\mu}{8}\,\rho\,\omega^2\,r^2, \tag{4}$$

$$\sigma_r^{II} = A^{II} - \frac{B^{II}}{r^2} - \frac{3+\mu}{8}\,\rho\,\omega^2\,r^2, \tag{5}$$

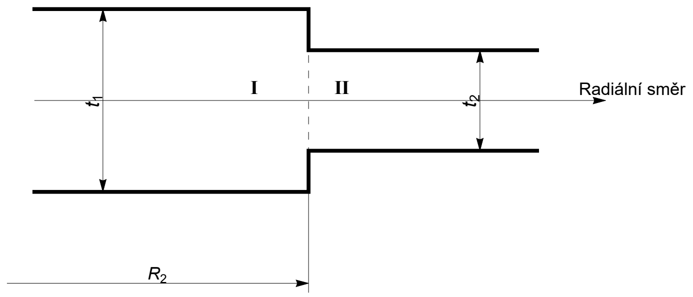
$$\sigma_t^{II} = A^{II} + \frac{B^{II}}{r^2} - \frac{1+3\,\mu}{8}\,\rho\,\omega^2\,r^2. \tag{6}$$

Hodnoty konstant určíme z okrajových podmínek.
Dvě z těchto podmínek jsou jednoduché. Jsou to vztahy radiální napětí na obvodu otvoru (R_1) a radiální napětí na vnějším obvodě (R_3). Obě tato napětí jsou nulová

$$\sigma_{r1}^{I} = 0, \tag{7}$$

$$\sigma_{r3}^{II} = 0. \tag{8}$$

Další okrajová podmínky platí na poloměru R_2, kde se obě části kotouče setkávají. Na následujícím obrázku vidíme tuto oblast.



Z obrázku je jasné, že radiální síla mezi segmenty I a II je jednou přenášená deskou o tloušťce t_1 a podruhé deskou o tloušťce t_2. To znamená, že radiální napětí se musí chovat odpovídajícím způsobem:

$$\sigma_{r2}^{I}\,t_1 = \sigma_{r2}^{II}\,t_2. \tag{9}$$

Pro poloměr R_2 napíšeme i poslední okrajovou podmínku.
Oba kotouče jsou ve skutečnosti dvě části jediného kotouče. Jsou tedy na poloměru R_2 spojené. Musejí se proto na poloměru R_2 i stejně deformovat. Tuto skutečnost zapíšeme takto:

$$\triangle R_2^{I} = \triangle R_2^{II}. \tag{10}$$

Radiální deformace vyjádříme pomocí poměrných deformací:

$$R_2\,\varepsilon_{t2}^{I} = R_2\,\varepsilon_{t2}^{I}. \tag{11}$$

Z rovnice zkrátíme R_2 a za poměrné deformace dosadíme z Hookova zákona:

$$\frac{1}{\mathbb{E}}\left(\sigma_{t2}^{I} - \mu\left(\sigma_{r2}^{I} - \sigma_{a2}^{I}\right)\right) = \frac{1}{\mathbb{E}}\left(\sigma_{t2}^{II} - \mu\left(\sigma_{r2}^{II} - \sigma_{a2}^{II}\right)\right). \tag{12}$$

Modul pružnosti zkrátíme a za axiální napětí σ_a dosadíme nulu:

$$\sigma_{t2}^{I} - \mu\,\sigma_{r2}^{I} = \sigma_{t2}^{II} - \mu\,\sigma_{r2}^{II}. \tag{13}$$

Tento vztah je čtvrtá okrajová podmínka.

Po dosazení do okrajových podmínek dostaneme soustavu čtyř rovnic pro neznámé A^{I}, B^{I}, A^{II}, B^{II}:

$$A_{\mathbb{I}} - \frac{B_{\mathbb{I}}}{R_1^2} - \frac{1}{8} (3+\mu) \rho \omega^2 R_1^2 = 0 \tag{14}$$

$$A_{\mathbb{II}} - \frac{B_{\mathbb{II}}}{R_3^2} - \frac{1}{8} (3+\mu) \rho \omega^2 R_3^2 = 0 \tag{15}$$

$$\left(A_{\mathbb{I}} - \frac{B_{\mathbb{I}}}{R_2^2} - \frac{1}{8} (3+\mu) \rho \omega^2 R_2^2\right) t_1 = \left(A_{\mathbb{II}} - \frac{B_{\mathbb{II}}}{R_2^2} - \frac{1}{8} (3+\mu) \rho \omega^2 R_2^2\right) t_2 \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &A_{\mathbb{I}} + \frac{B_{\mathbb{I}}}{R_2^2} - \frac{1}{8} (1+3\mu) \rho \omega^2 R_2^2 - \mu \left(A_{\mathbb{I}} - \frac{B_{\mathbb{I}}}{R_2^2} - \frac{1}{8} (3+\mu) \rho\right. \\ &= A_{\mathbb{II}} + \frac{B_{\mathbb{II}}}{R_2^2} - \frac{1}{8} (1+3\mu) \rho \omega^2 R_2^2 - \mu \left(A_{\mathbb{II}} - \frac{B_{\mathbb{II}}}{R_2^2} - \frac{1}{8} (3+\right. \end{aligned} \tag{17}$$

jejichž řešení má tvar

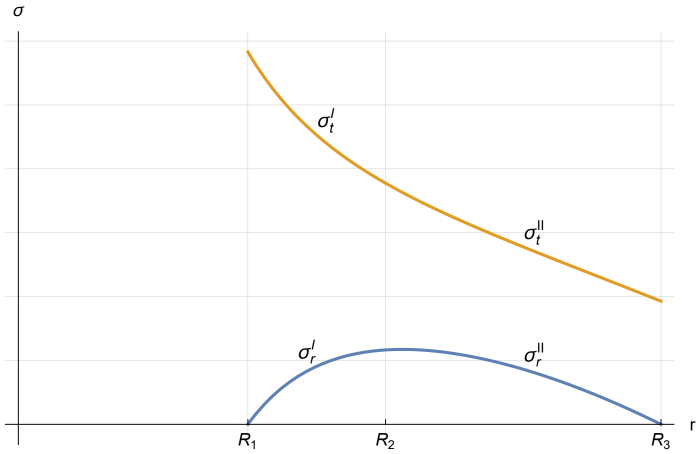
$$\begin{aligned} A^{I} = {} & ((3+\mu) \rho \omega^2 (-((-1+\mu) R_2^6 (t_1 - t_2)) + (1+\mu) R_2^4 R_3^2 (t_1 - t_2) + \\ & 2 R_2^2 R_3^4 t_2 + R_1^4 (-((1+\mu) R_3^2 (t_1 - t_2)) + R_2^2 ((-1+\mu) t_1 - (1+\mu) t_2)))) / \\ & (8 (-((-1+\mu) R_2^4 (t_1 - t_2)) + R_2^2 R_3^2 ((1+\mu) t_1 - (-1+\mu) t_2) + \\ & R_1^2 (-((1+\mu) R_3^2 (t_1 - t_2)) + R_2^2 ((-1+\mu) t_1 - (1+\mu) t_2)))) \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} B^{I} = {} & ((3+\mu) \rho \omega^2 R_1^2 R_2^2 (-((-1+\mu) R_2^4 (t_1 - t_2)) + (1+\mu) R_2^2 R_3^2 (t_1 - \\ & 2 R_3^4 t_2 + R_1^2 ((-1+\mu) R_2^2 (t_1 - t_2) - R_3^2 ((1+\mu) t_1 - (-1+\mu) t_2)))) \\ & (8 (-((-1+\mu) R_2^4 (t_1 - t_2)) + R_2^2 R_3^2 ((1+\mu) t_1 - (-1+\mu) t_2) + \\ & R_1^2 (-((1+\mu) R_3^2 (t_1 - t_2)) + R_2^2 ((-1+\mu) t_1 - (1+\mu) t_2)))) \end{aligned} \tag{19}$$

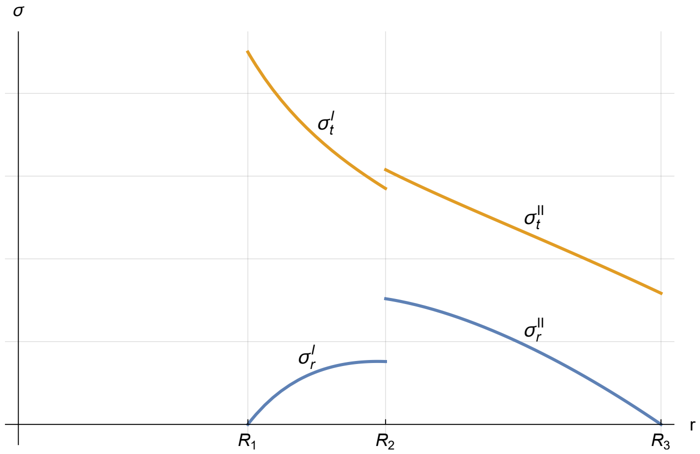
$$\begin{aligned} A^{II} = {} & ((3+\mu) \rho \omega^2 (-2 R_1^4 R_2^2 t_1 - (-1+\mu) R_2^6 (t_1 - t_2) + \\ & (1+\mu) R_1^2 (R_2^4 - R_3^4) (t_1 - t_2) + R_2^2 R_3^4 ((1+\mu) t_1 - (-1+\mu) t_2) \\ & (8 (-((-1+\mu) R_2^4 (t_1 - t_2)) + R_2^2 R_3^2 ((1+\mu) t_1 - (-1+\mu) t_2 \\ & R_1^2 (-((1+\mu) R_3^2 (t_1 - t_2)) + R_2^2 ((-1+\mu) t_1 - (1+\mu) t_2))) \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} B^{II} = {} & ((3+\mu) \rho \omega^2 R_2^2 R_3^2 (-2 R_1^4 t_1 - (-1+\mu) R_2^2 (R_2^2 - R_3^2) (t \\ & R_1^2 ((1+\mu) R_2^2 (t_1 - t_2) + R_3^2 (-((-1+\mu) t_1) + (1+\mu) t_2) \\ & (8 (-((-1+\mu) R_2^4 (t_1 - t_2)) + R_2^2 R_3^2 ((1+\mu) t_1 - (-1+\mu) \\ & R_1^2 (-((1+\mu) R_3^2 (t_1 - t_2)) + R_2^2 ((-1+\mu) t_1 - (1+\mu) t_2) \end{aligned} \tag{21}$$

Napětí v desce, kde t_1 = 1. t_2



Napětí v desce, kde t_1 = 0.5 t_2



Napětí v desce, kde t_1 = 0.25 t_2