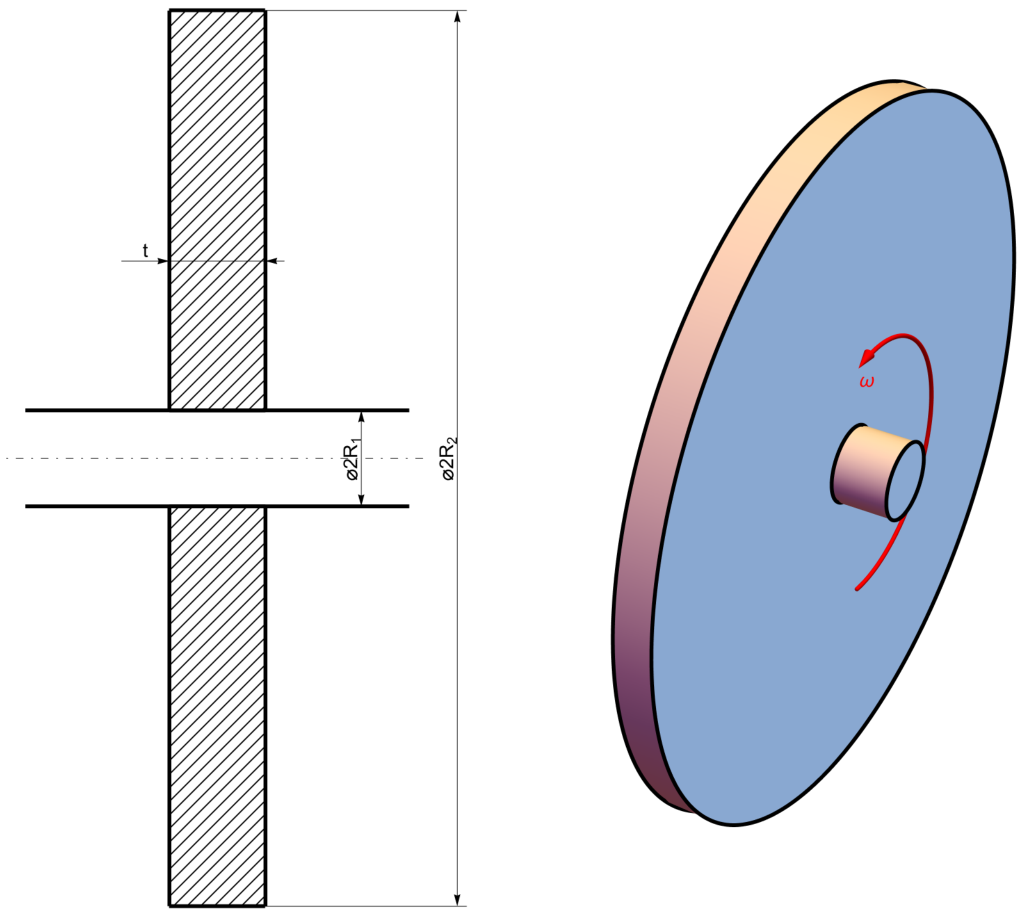
Kotouč nalisovaný na tuhém čepu

Zadání



Kotouč je nalisován na čep a roztočen. Čep považujeme za absolutně tuhý.

Dáno: tlak v nalisování před roztočením: p_n, rozměry R_1, R_2, t, vlastnosti materiálu $\mathbb{E}$, μ, σ_D

Určete přesah v nalisování a ***proveďte*** pevnostní kontrolu po nalisování. ***Určete*** úhlovou rychlost ω_0, při níž dojde k odlehnutí kotouče od čepu.

Stanovte velikost tlaku v nalisování v závislosti na úhlové rychlosti.

Řešení

Pevnostní kontrola po nalisování

Předepsaný tlak v nalisování má hodnotu, která je nutná např. proto, aby kotouč na čepu neprokluzoval. Může se ale stát, že předepsaný tlak daný materiál nevydrží. Musíme proto provést pevnostní kontrolu. Pevnostní podmínka pro obyčejnou tlakovou nádobu má -jak známo- tvar

$$p_n \leq \frac{\sigma_D}{2}\left(1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right). \tag{1}$$

Je-li pevnostní podmínka splněná, můžeme pokračovat k dalším bodům zadání.

Přesah v nalisování

Přesah v nalisování označme δ. Při nalisování dojde k tomu, že poloměr R_1 kotouče vzroste právě o velikost přesahu (protože čep se nedeformuje). Platí tedy deformační rovnice

$$\triangle R_1 = \delta. \tag{2}$$

Pro změnu poloměru platí známý vztah

$$\triangle R_1 = R_1\, \varepsilon_{t1}. \tag{3}$$

Za tečnou poměrnou deformaci dosadíme z Hookova zákona a dostáváme

$$\delta = R_1 \frac{1}{\mathbb{E}}\left(\sigma_{t1} - \mu\,(\sigma_{r1} + \sigma_{a1})\right). \tag{4}$$

Axiální napětí σ_a je nulové. Za radiální a tečné napětí dosadíme vztahy pro silnostěnou nádobu a dostáváme

$$\delta = R_1 \frac{1}{\mathbb{E}}\left(A + \frac{B}{R_1^2} - \mu\left(A - \frac{B}{R_1^2}\right)\right) = \frac{R_1}{\mathbb{E}}\left(A\,(1-\mu) + \frac{B}{R_1^2}\,(1+\mu)\right) \tag{5}$$

Konstanty A a B pro silnostěnnou nádobu mají v našem případě tvar

$$A = \frac{p_n\, R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \tag{6}$$

$$B = p_n \frac{R_1^2\, R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}. \tag{7}$$

Dosadíme tyto konstanty do předcházející rovnice a dostaneme vztah pro přesah v nalisování

$$\delta = \frac{p_n\, R_1\left((-1+\mu)\, R_1^2 - (1+\mu)\, R_2^2\right)}{\mathbb{E}\left(R_1^2 - R_2^2\right)}. \tag{8}$$

Úhlová rychlost pro odlehnutí

Představme si, že nejprve volný kotouč roztočíme a teprve roztočený ho lisujeme na čep. Je asi jasné, že v důsledku roztočení se zvětší poloměr R_1 o nějaké ΔR_1. Bude tedy menší přesah a proto bude tlak v nalisování při rotaci menší, než by byl bez rotace. Kdybychom kotouč roztočili natolik, že

$$\triangle R_1 = \delta, \tag{9}$$

znamenalo by to, že v nalisování by nebyl žádný tlak. To je právě ta situace, kterou hledáme. Otázka tedy je, při jaké úhlové rychlosti dojde ke splnění předcházející rovnice.

Změnu poloměru ΔR_1 vyjádříme pomocí poměrné deformace

$$R_1\ \varepsilon_{t1} = \delta \tag{10}$$

a za poměrnou deformaci ε_{t1} dosadíme z Hookova zákona

$$R_1 \frac{1}{\mathbb{E}} \left(\sigma_{t1} - \mu\ (\sigma_{r1} + \sigma_{a1})\right) = \delta. \tag{11}$$

Axiální napětí σ_a je nulové. Radiální napětí na poloměru R_1 je u volného kotouče také nulové. Dostáváme tedy rovnici

$$R_1 \frac{\sigma_{t1}}{\mathbb{E}} = \delta. \tag{12}$$

Za napětí σ_t dosadíme známé vztahy. Tyto vztahy obsahují konstanty A a B. Abychom je odlišili od konstant A a B z minulého odstavce, uznačíme je A_{vk} a B_{vk}. Index vk vyjadřuje skutečnost, že se počítáme **v**olný **k**otouč.

$$R_1 \frac{1}{\mathbb{E}} \left(A_{vk} + \frac{B_{vk}}{R_1^2} - \frac{1 + 3\mu}{8}\ \rho\, \omega^2\, R_1^2\right) = \delta. \tag{13}$$

Hodnoty konstant A_{vk} a B_{vk} určíme z okrajových podmínek. Pro volný kotouč platí, že radiální napětí na obvodu otvoru i na vnějším obvodu je nulové, takže okrajové podmínky mají podobu

$$A_{vk} - \frac{B_{vk}}{R_1^2} - \frac{3 + \mu}{8}\ \rho\, \omega^2\, R_1^2 = 0, \tag{14}$$

$$A_{vk} - \frac{B_{vk}}{R_2^2} - \frac{3 + \mu}{8}\ \rho\, \omega^2\, R_2^2 = 0. \tag{15}$$

Rovnice vyřešíme a dostaneme hodnoty konstant

$$A_{vk} = \frac{1}{8}\ (3 + \mu)\ \rho\, \omega^2 \left(R_1^2 + R_2^2\right), \tag{16}$$

$$B_{vk} = \frac{1}{8} \left(3\, \rho\, \omega^2\, R_1^2\, R_2^2 + \mu\, \rho\, \omega^2\, R_1^2\, R_2^2\right). \tag{17}$$

Obě konstanty dosadíme do deformační rovnice a vyjádříme z ní úhlovou rychlost ω:

$$\omega_M = 2 \sqrt{\frac{\delta\, \mathbb{E}}{\rho\, R_1 \left((1 - \mu)\ R_1^2 + (3 + \mu)\ R_2^2\right)}}\ . \tag{18}$$

Za přesah δ můžeme ještě dosadit vztah, který nám vyšel dříve. Dostaneme

$$\omega_M = 2 \sqrt{\frac{p_n \left((1 - \mu)\ R_1^2 + (1 + \mu)\ R_2^2\right)}{\rho \left(R_1^2 - R_2^2\right) \left((-1 + \mu)\ R_1^2 - (3 + \mu)\ R_2^2\right)}}\ . \tag{19}$$

Tlak v nalisování jako funkce úhlové rychlosti

Pro napětí v rotujícím kotouči platí známé vztahy

$$\sigma_r = \mathbb{A} - \frac{\mathbb{B}}{r^2} - \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 r^2, \tag{20}$$

$$\sigma_t = \mathbb{A} + \frac{\mathbb{B}}{r^2} - \frac{1+3\mu}{8} \rho \omega^2 r^2. \tag{21}$$

Podotkněme, že konstanty $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ jsou jiné, než konstanty A a B resp. A_{vk} a B_{vk}, jak jsme je používali v přechozích odstavcích.
Konstanty $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ stanovíme z okrajových podmínek:
- na vnějším okraji kotouče (R_2) je nulové radiální napětí
- na vnitřním okraji kotouče (R_1) je radiální deformace ΔR_1 rovna přesahu δ

Okrajové podmínky mají tedy tvar

$$\sigma_{r2} = 0, \tag{22}$$

$$\Delta R_1 = \delta. \tag{23}$$

Kromě toho platí také, že radiální napětí v nalisování (na poloměru R_1) je rovno (zatím neznámému) tlaku p:

$$\sigma_{r1} = -p. \tag{24}$$

Upravujme druhou podmínku.

$$R_1 \varepsilon_{t1} = \delta,$$

$$R_1 \frac{1}{\mathbb{E}} (\sigma_{t1} - \mu (\sigma_{r1} + \sigma_{a1})) = \delta,$$

$$\frac{R_1}{\mathbb{E}} \left(\mathbb{A} + \frac{\mathbb{B}}{R_1^2} - \frac{1+3\mu}{8} \rho \omega^2 R_1^2 + \mu p\right) = \delta.$$

Okrajové podmínky mají tedy tuto podobu:

$$\mathbb{A} - \frac{\mathbb{B}}{R_2^2} - \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 R_2^2 = 0, \tag{25}$$

$$\frac{R_1}{\mathbb{E}} \left(\mathbb{A} + \frac{\mathbb{B}}{R_1^2} - \frac{1+3\mu}{8} \rho \omega^2 R_1^2 + \mu p\right) = \delta, \tag{26}$$

$$\mathbb{A} - \frac{\mathbb{B}}{R_1^2} - \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 R_1^2 = -p. \tag{27}$$

Tuto soustavu rovnic můžeme vyřešit pro neznámé $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ a p. Dostaneme vztahy

$$\mathbb{A} = \frac{-8 \mathbb{E} \delta R_1 + \left(-1+\mu^2\right) \rho \omega^2 R_1^4 - \left(3 + 4\mu + \mu^2\right) \rho \omega^2 R_2^4}{8 (-1+\mu) R_1^2 - 8 (1+\mu) R_2^2}, \tag{28}$$

$$\mathbb{B} = \frac{R_1 R_2^2 \left(-8 \mathbb{E} \delta + \left(-1+\mu^2\right) \rho \omega^2 R_1^3 - \left(-3 + 2\mu + \mu^2\right) \rho \omega^2 R_1 R_2^2\right)}{8 (-1+\mu) R_1^2 - 8 (1+\mu) R_2^2}, \tag{29}$$

$$p = \frac{\left(R_1^2 - R_2^2\right) \left(4 \mathbb{E} \delta + (-1+\mu) \rho \omega^2 R_1^3 - (3+\mu) \rho \omega^2 R_1 R_2^2\right)}{4 (-1+\mu) R_1^3 - 4 (1+\mu) R_1 R_2^2}. \tag{30}$$

Dosadíme-li do posledního vztahu za δ, jak jsme spočetli výše, dostaneme vztah mezi ω a p:

$$p = \frac{4\,p_n\left((-1+\mu)\,R_1^2-(1+\mu)\,R_2^2\right)+\rho\,\omega^2\left(R_1^2-R_2^2\right)\left((-1+\mu)\,R_1^2-(3+\mu)\,R_2^2\right)}{4\,(-1+\mu)\,R_1^2-4\,(1+\mu)\,R_2^2} \tag{31}$$

Na grafu vidíme, jak se při roztáčení kotouče tlak v nalisování postupně snižuje.

Při dosažení ω_M dosáhne tak v nalisování nuly. Záporný tlak v nalisování není možný. To znamená, že při úhlové rychlosti ω_M dojde k odlehnutí kotouče od čepu.
Velikost ω_M tedy určíme tak, že v poslední rovnici položíme $p = 0$ a vyjádříme ω:

$$\omega_M = 2\sqrt{\frac{p_n\left((1-\mu)\,R_1^2+(1+\mu)\,R_2^2\right)}{\rho\left(R_1^2-R_2^2\right)\left((-1+\mu)\,R_1^2-(3+\mu)\,R_2^2\right)}}\,. \tag{32}$$

Podle očekávání jsme dostali stejný vztah, jako v kapitole, kde jsme určovali úhlovou rychlost při odlehnutí přímočařejším způsobem.

Průběh napětí pro různé úhlové rychlosti