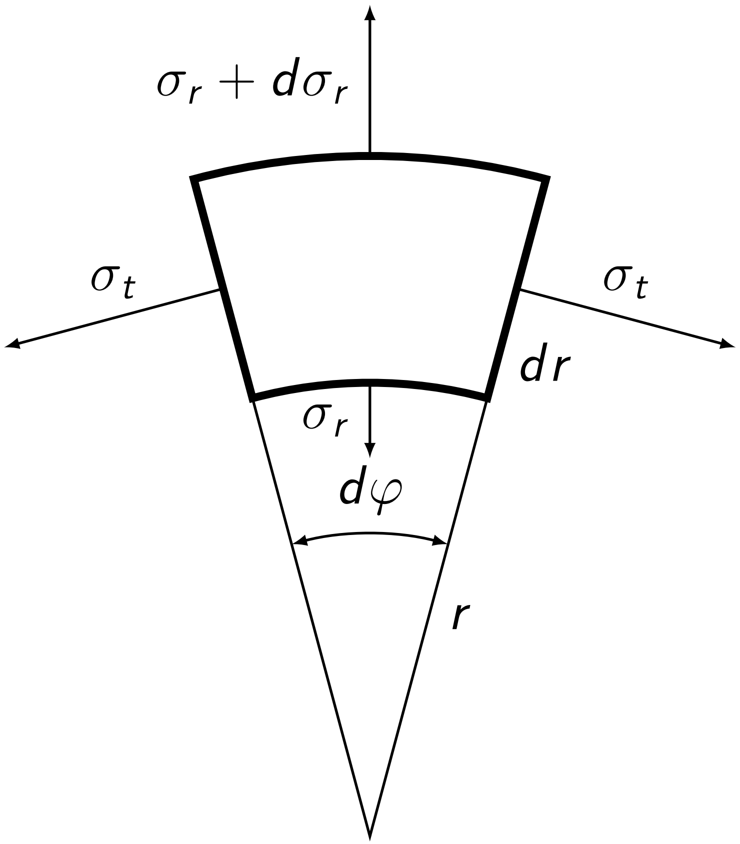
Odvození 1:



Rovnováha v radiálním směru:

$$(\sigma_r + d\sigma_r) \cdot h \cdot (r + dr) \cdot d\varphi - \sigma_r \cdot h \cdot r \cdot d\varphi = \\ = h \cdot d\left(r \cdot \sigma_r\right) \cdot d\varphi$$

$$h \cdot d\left(r \cdot \sigma_r\right) \cdot d\varphi - \sigma_t \cdot h \cdot dr \cdot d\varphi = 0$$

protože $h \cdot dr \cdot d\varphi \neq 0$

$$\frac{d}{dr}\left(r \cdot \sigma_r\right) - \sigma_t = 0$$

Fyzikální rovnice: Hookův zákon

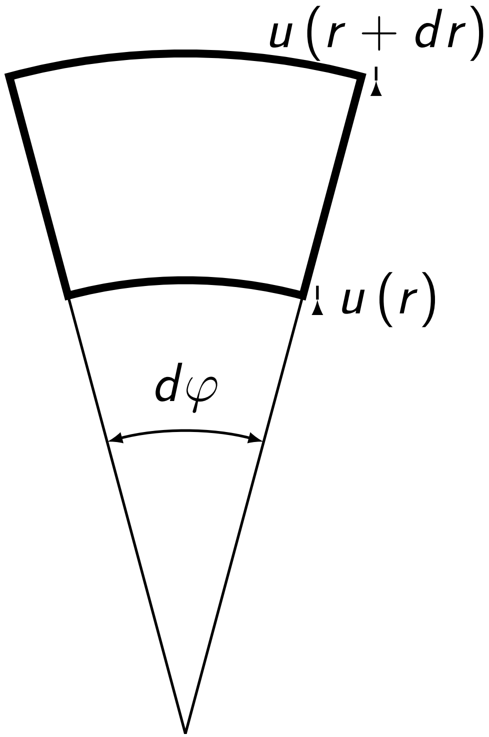
$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(\varepsilon_r + \mu \cdot \varepsilon_t\right)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(\varepsilon_t + \mu \cdot \varepsilon_r\right)$$

Předpoklad rovinné napjatosti:

$$\sigma_z = 0$$

Odvození 1:



Deformační podmínka:
posuv v radiálním směru u změní obvod o $2 \cdot \pi \cdot u \rightarrow$ poměrné prodloužení v tangenciálním směru

$$\varepsilon_t = \frac{2 \cdot \pi \cdot (r+u) - 2 \cdot \pi \cdot r}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{u}{r}$$

poměrné prodloužení v radiálním směru

$$u(r+dr) = u(r) + \frac{du}{dr} \cdot dr$$

$$\varepsilon_r = \frac{u(r+dr) - u(r)}{dr} = \frac{du}{dr}$$

Odvození 1:

Dosadíme do fyzikálních rovnic:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(\frac{du}{dr} + \mu \cdot \frac{u}{r} \right)$$
$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(\frac{u}{r} + \mu \cdot \frac{du}{dr} \right)$$

a dále do rovnice rovnováhy:

$$\frac{d}{dr} \left(r \cdot \left(\frac{du}{dr} + \mu \cdot \frac{u}{r} \right) \right) - \left(\frac{u}{r} + \mu \cdot \frac{du}{dr} \right) = 0$$

Protože $\frac{d}{dr}(r \cdot \sigma_r) = \sigma_r + r \cdot \frac{d\sigma_r}{dr}$, dostáváme:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0$$

Odvození 1:

Řešení hledáme ve tvaru: $u = C \cdot r^{\lambda}$; $\frac{du}{dr} = C \cdot \lambda \cdot r^{\lambda-1}$; $\frac{d^2u}{dr}^2 = C \cdot \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot r^{\lambda-2}$

Řešením homogenní rovnice pomocí řešení charakteristické rovnice $\lambda \cdot (\lambda - 1) + \lambda - 1 = \lambda^2 - 1 = 0$ dostaneme $\lambda = \pm 1$. Řešení je tedy ve tvaru:

$$u = C_1 \cdot r + C_2 \cdot \frac{1}{r}$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = C_1 - C_2 \cdot \frac{1}{r^2}, \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r} = C_1 + C_2 \cdot \frac{1}{r^2}$$

Odvození 1:

Dosadíme do fyzikálních rovnic:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(C_1 - C_2 \cdot \frac{1}{r^2} + \mu \cdot \left(C_1 + C_2 \cdot \frac{1}{r^2} \right) \right) = A - \frac{B}{r^2}, \quad A = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot C_1 \cdot (1+\mu)$$
$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(C_1 + C_2 \cdot \frac{1}{r^2} + \mu \cdot \left(C_1 - C_2 \cdot \frac{1}{r^2} \right) \right) = A + \frac{B}{r^2}, \quad B = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot C_2 \cdot (1-\mu)$$

Integrační konstanty určíme z okrajových podmínek:

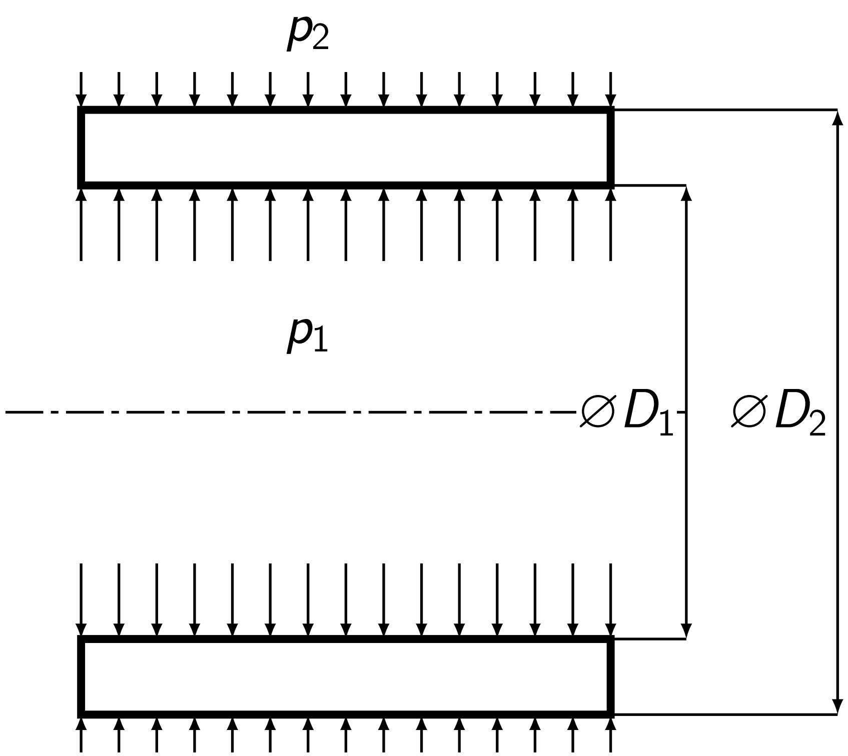
$$\sigma_r\big|_{r=R_1} = -p_1, \quad \sigma_r\big|_{r=R_2} = -p_2$$

Dosazením a řešením systému 2 rovnic pro neznámé A a B dostaneme:

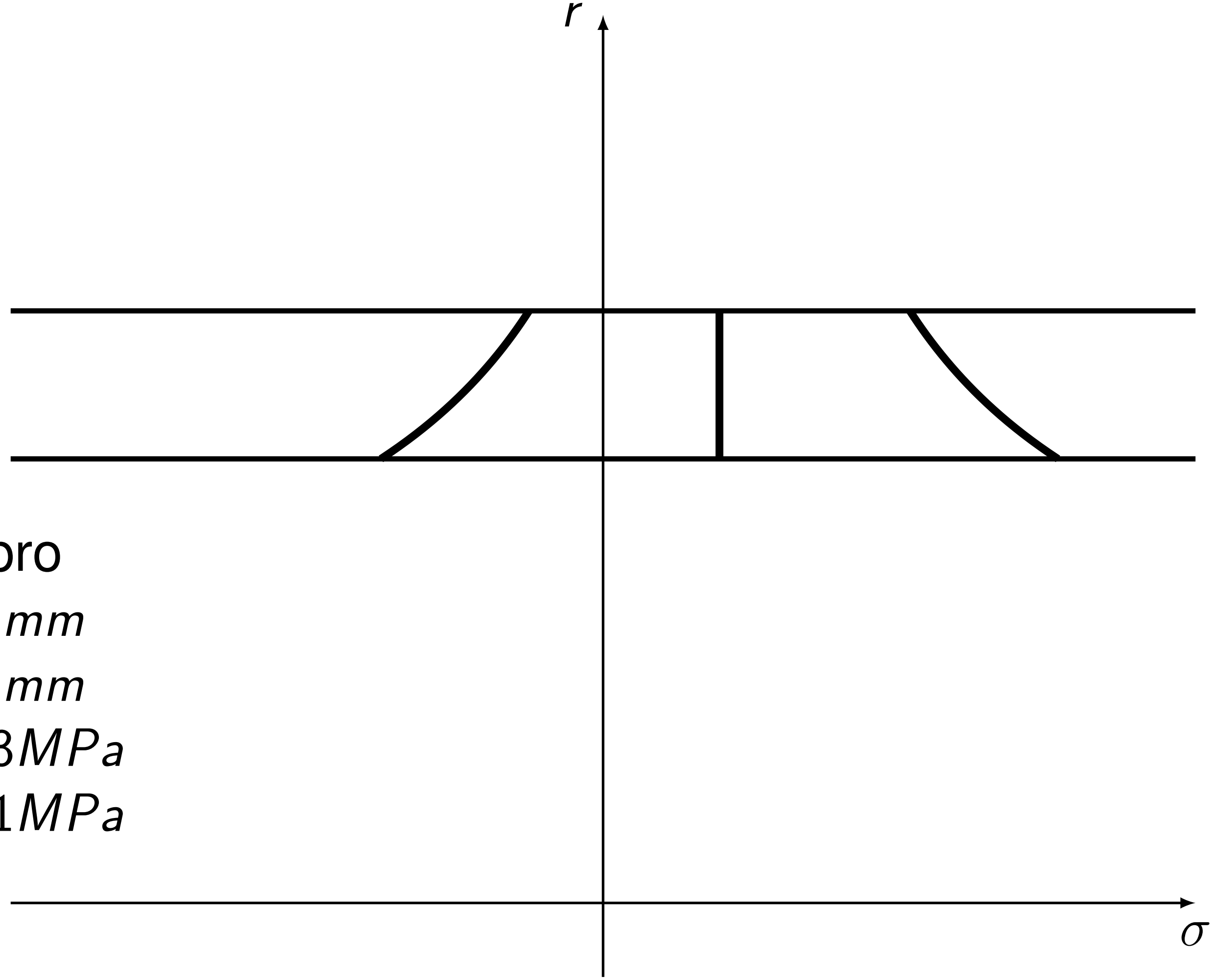
$$A = \frac{p_1 \cdot R_1^2 - p_2 \cdot R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad B = \frac{p_1 - p_2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot R_1^2 \cdot R_2^2$$

Příklad 1:

Dáno: D_1, D_2, p_1, p_2.
Určete maximální σ_{red}.



Řešení 1:



Řešte pro

$D_1 = 12mm$

$D_2 = 16mm$

$p_1 = 0,3MPa$

$p_2 = 0,1MPa$