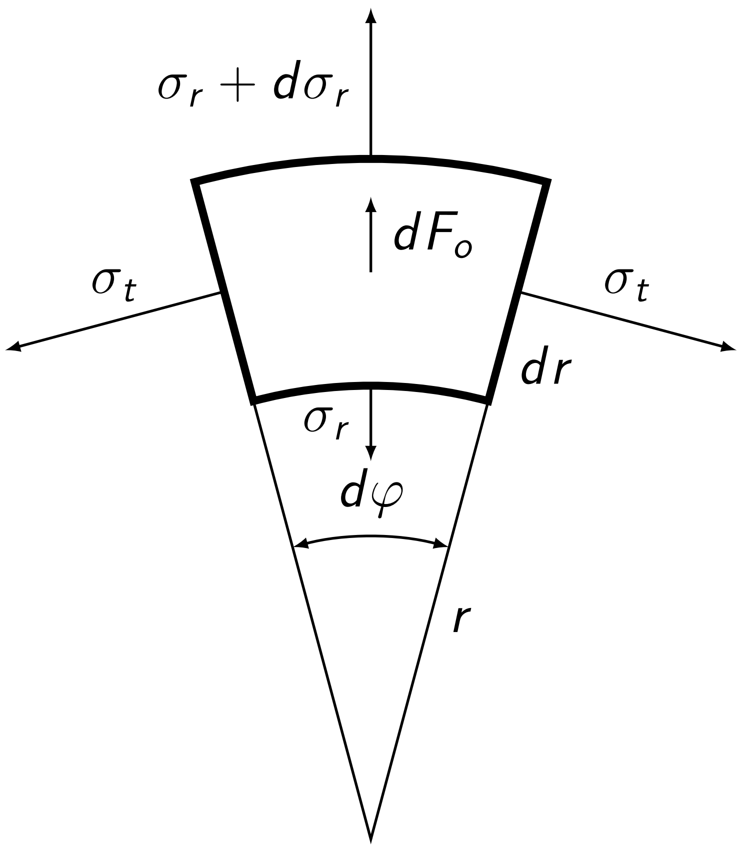
Odvození 1:



Rovnováha v radiálním směru:

$$(\sigma_r + d\sigma_r) \cdot h \cdot (r + dr) \cdot d\varphi - \\ -\sigma_r \cdot h \cdot r \cdot d\varphi = h \cdot d\,(r \cdot \sigma_r) \cdot d\varphi$$

odstředivá síla:

$$dF_o = \omega^2 \cdot r^2 \cdot h \cdot \rho \cdot d\varphi \cdot dr$$

$$h \cdot d\,(r \cdot \sigma_r) \cdot d\varphi + dF_o - \sigma_t \cdot h \cdot dr \cdot d\varphi = 0$$

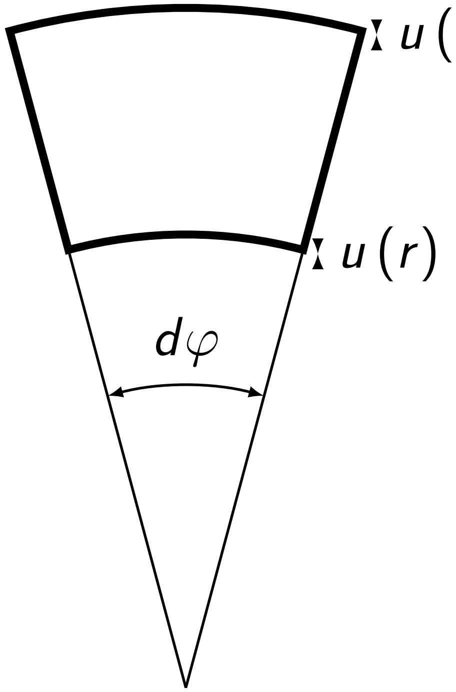
Protože $h \cdot dr \cdot d\varphi \neq 0$

$$\frac{d}{dr}(r \cdot \sigma_r) - \sigma_t = -\omega^2 \cdot r^2 \cdot \rho$$

Fyzikální rovnice: Hookův zákon

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_r + \mu \cdot \varepsilon_t)$$
$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_t + \mu \cdot \varepsilon_r)$$

Odvození 1:



Deformační podmínka:
posuv v radiálním směru u změní obvod o $2 \cdot \pi \cdot u$ $\rightarrow$poměrné prodloužení v tangenciálním směru

$$\varepsilon_t = \frac{2 \cdot \pi \cdot (r+u) - 2 \cdot \pi \cdot r}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{u}{r}$$

poměrné prodloužení v radiálním směru

$$u(r+dr) = u(r) + \frac{du}{dr} \cdot dr$$

$$\varepsilon_r = \frac{u(r+dr) - u(r)}{dr} = \frac{du}{dr}$$

Odvození 1:

Dosadíme do fyzikálních rovnic:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(\frac{du}{dr} + \mu \cdot \frac{u}{r} \right)$$
$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(\frac{u}{r} + \mu \cdot \frac{du}{dr} \right)$$

a dále do rovnice rovnováhy:

$$\frac{d}{dr}\left(r \cdot \left(\frac{du}{dr} + \mu \cdot \frac{u}{r} \right) \right) - \left(\frac{u}{r} + \mu \cdot \frac{du}{dr} \right) = -\frac{1-\mu^2}{E} \cdot \omega^2 \cdot \rho \cdot r^2$$

Protože $\frac{d}{dr}(r \cdot \sigma_r) = \sigma_r + r \cdot \frac{d\sigma_r}{dr}$, dostáváme:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = -\frac{1-\mu^2}{E} \cdot \omega^2 \cdot \rho \cdot r$$

Odvození 1:

Řešení hledáme ve tvaru: $u = u_h + u_p$;

$u_h = C \cdot r^{\lambda}$; $\frac{du_h}{dr} = C \cdot \lambda \cdot r^{\lambda-1}$; $\frac{d^2u_h}{dr^2} = C \cdot \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot r^{\lambda-2}$

Řešením homogenní rovnice pomocí řešení charakteristické rovnice $\lambda \cdot (\lambda - 1) + \lambda - 1 = \lambda^2 - 1 = 0$ dostaneme $\lambda = \pm 1$. Řešení je tedy ve tvaru:

$$u_h = C_1 \cdot r + C_2 \cdot \frac{1}{r}$$

Odvození 1:

Partikulární řešení: odhad podle tvaru pravé strany

$$u_p'' = \mathbb{P}(r) \rightarrow u_p = \mathbb{P}\left(r^3, r^2, r\right)$$

Pravá strana: polynom $\rightarrow u_p$ ve tvaru polynomu: $u_p = K \cdot r^3$,

$$\frac{du_p}{dr} = 3 \cdot K \cdot r^2, \; \frac{d^2u_p}{dr^2} = 6 \cdot K \cdot r$$

Dosadíme do diferenciální rovnice a řešíme pro K:

$$6 \cdot K \cdot r + 3 \cdot K \cdot r - K \cdot r = -\frac{1-\mu^2}{E} \cdot \omega^2 \cdot \rho \cdot r$$

$$K = -\frac{1-\mu^2}{8 \cdot E} \cdot \omega^2 \cdot \rho \rightarrow u_p = -\frac{1-\mu^2}{8 \cdot E} \cdot \omega^2 \cdot \rho \cdot r^3$$

Odvození 1:

Dosadíme do fyzikálních rovnic:

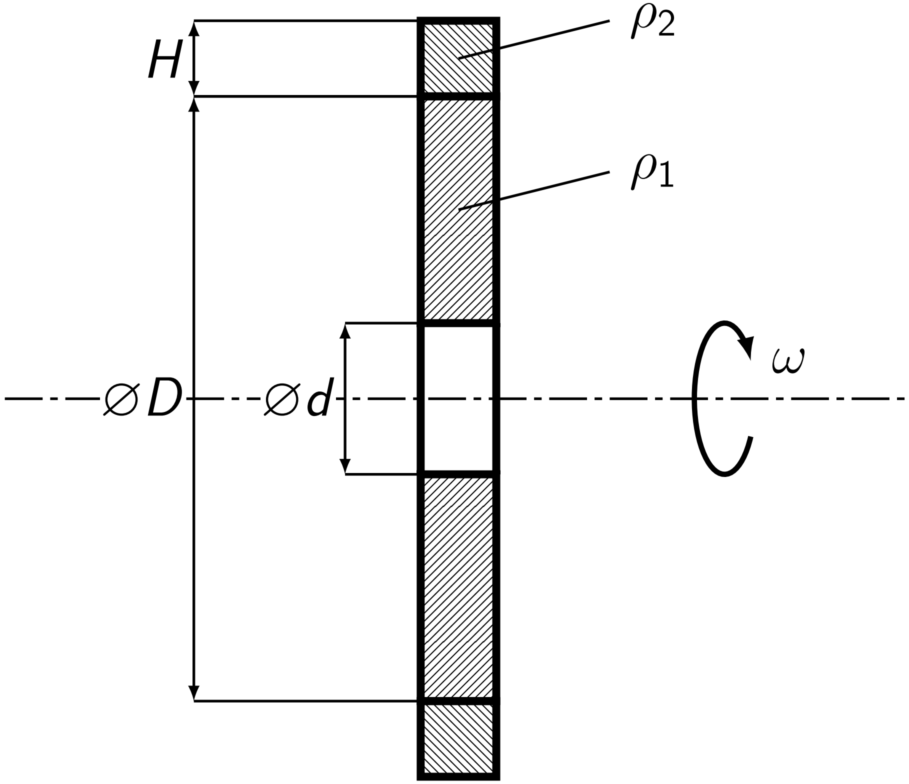
$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(C_1 - C_2 \cdot \frac{1}{r^2} + \mu \cdot \left(C_1 + C_2 \cdot \frac{1}{r^2} \right) \right) - \frac{3+\mu}{8} \cdot \omega^2 \cdot \rho \cdot r^2$$
$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(C_1 + C_2 \cdot \frac{1}{r^2} + \mu \cdot \left(C_1 - C_2 \cdot \frac{1}{r^2} \right) \right) - \frac{1+3 \cdot \mu}{8} \cdot \omega^2 \cdot \rho \cdot r^2$$

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} - \frac{3+\mu}{8} \cdot \omega^2 \cdot \rho \cdot r^2, \quad \sigma_t = A + \frac{B}{r^2} - \frac{1+3 \cdot \mu}{8} \cdot \omega^2 \cdot \rho \cdot r^2$$

Integrační konstanty A a B je nutno určit podle okrajových podmínek pro každý

jednotlivý případ zvlášť.

Příklad 1:

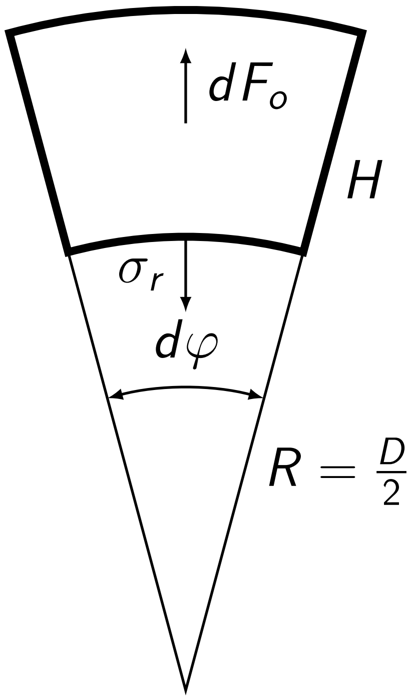


Dáno: D, d, H, ρ_1, ρ_2, ω

Řešte pro:

1. $d \neq 0$
2. $d = 0$

Řešení 1:



Zatížení na průměru D:

$$dF_o = \omega^2 \cdot \left(\frac{D+H}{2}\right)^2 \cdot H \cdot t \cdot \rho_2 \cdot d\varphi$$

$$\sigma_r = \frac{dF_o}{\frac{D}{2} \cdot t \cdot d\varphi} = \omega^2 \cdot \rho_2 \cdot \frac{H}{D} \cdot \frac{(D+H)^2}{2}$$

základní rovnice:

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} - \frac{3+\mu}{8} \cdot \omega^2 \cdot \rho \cdot r^2$$
$$\sigma_t = A + \frac{B}{r^2} - \frac{1+3\cdot\mu}{8} \cdot \omega^2 \cdot \rho \cdot r^2$$

Řešení 1:

$d \neq 0$

okrajové podmínky:

$$\sigma_r\big|_{r=\frac{d}{2}} = 0$$

$$\sigma_r\big|_{r=\frac{D}{2}} = \omega^2 \cdot \rho_2 \cdot \frac{H}{D} \cdot \frac{(D+H)^2}{2}$$

$$A - B \cdot \frac{4}{d^2} = \frac{3+\mu}{8} \cdot \omega^2 \cdot \rho_1 \cdot \frac{d^2}{4}$$

$$A - B \cdot \frac{4}{D^2} = $$

$$= \omega^2 \cdot \left(\frac{3+\mu}{8} \cdot \rho_1 \cdot \frac{D^2}{4} + \rho_2 \cdot \frac{H}{D} \cdot \frac{(D+H)^2}{2}\right)$$

$d = 0$

$$\sigma_r\big|_{r=\frac{d}{2}} = \sigma_t\big|_{r=\frac{d}{2}}$$

$$\sigma_r\big|_{r=\frac{D}{2}} = \omega^2 \cdot \rho_2 \cdot \frac{H}{D} \cdot \frac{(D+H)^2}{2}$$

$$B \cdot \frac{8}{d^2} = \frac{\mu-1}{4} \cdot \omega^2 \cdot \rho_1 \cdot \frac{d^2}{4}$$

$$A - B \cdot \frac{4}{D^2} = $$

$$= \omega^2 \cdot \left(\frac{3+\mu}{8} \cdot \rho_1 \cdot \frac{D^2}{4} + \rho_2 \cdot \frac{H}{D} \cdot \frac{(D+H)^2}{2}\right)$$

Řešení 1:

$d \neq 0$

$$A = \frac{3+\mu}{8} \cdot \omega^2 \cdot \rho_1 \cdot \frac{D^2+d^2}{4} + \omega^2 \cdot \rho_2 \cdot \frac{H}{D} \cdot \frac{(D+H)^2}{2} \cdot \frac{D^2}{D^2-d^2}$$

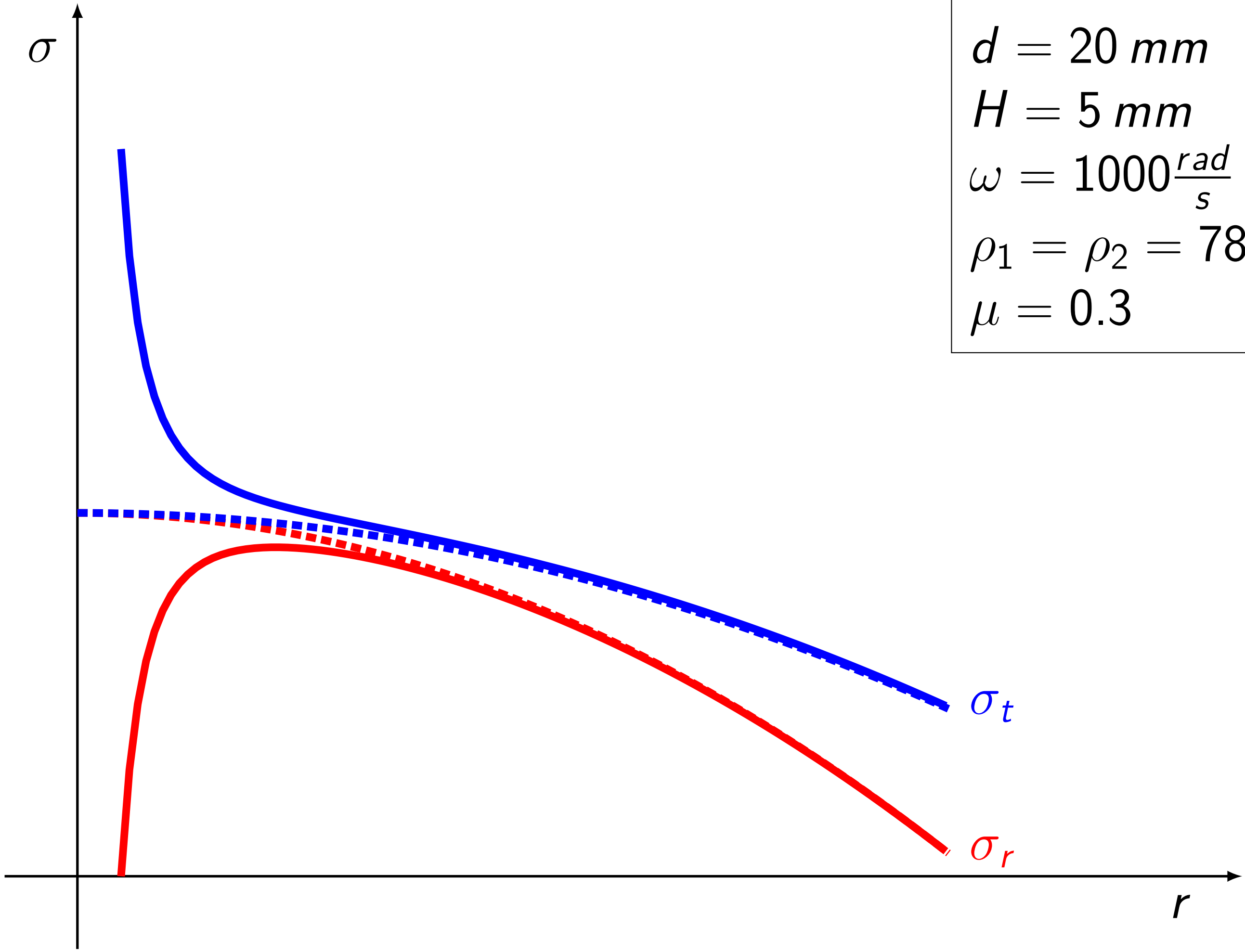
$$B = \omega^2 \cdot \frac{d^2 \cdot D^2}{8} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3+\mu}{8} \cdot \rho_1 + \rho_2 \cdot \frac{H}{D} \cdot \frac{(D+H)^2}{D^2-d^2} \right)$$

$d = 0$

$$A = \omega^2 \cdot \left(\rho_1 \cdot D^2 \cdot \frac{3+\mu}{32} + \rho_2 \cdot \frac{H}{D} \cdot \frac{(D+H)^2}{2} \right)$$

$$B = 0$$

Řešení 1:



$D = 400\ mm$

$d = 20\ mm$

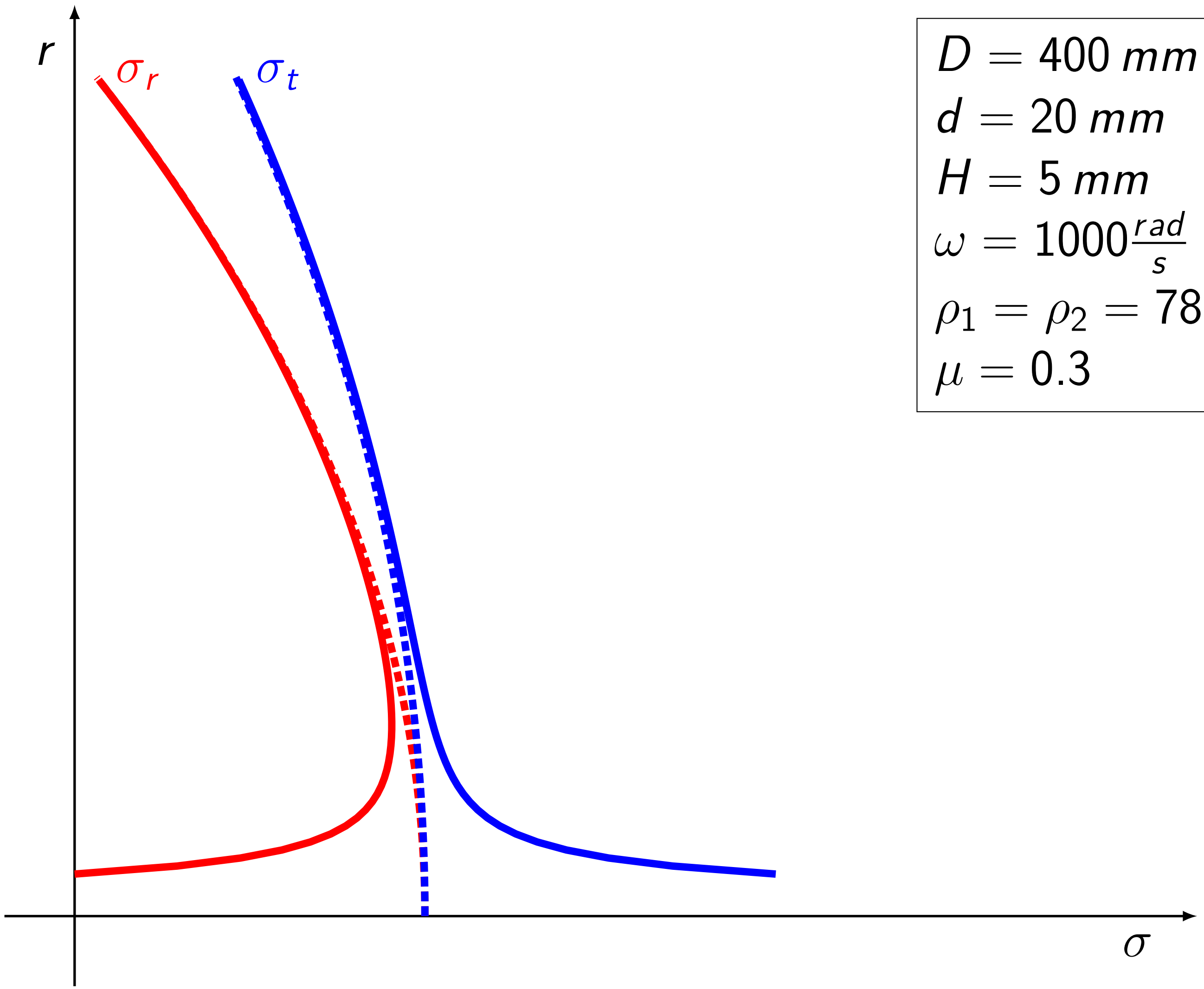
$H = 5\ mm$

$\omega = 1000 \frac{rad}{s}$

$\rho_1 = \rho_2 = 7800\ \frac{kg}{m^3}$

$\mu = 0.3$

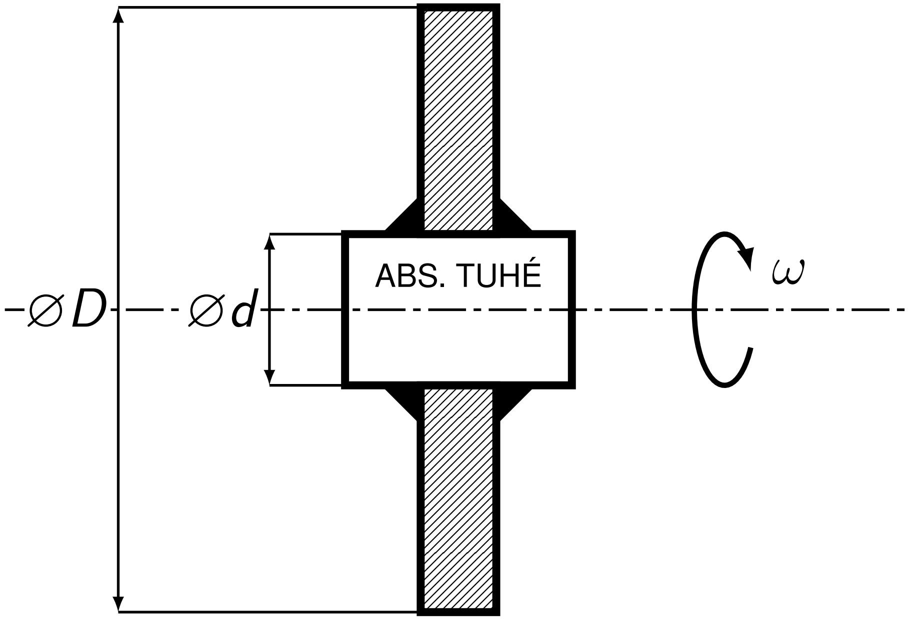
Řešení 1:



$D = 400\ mm$
$d = 20\ mm$
$H = 5\ mm$
$\omega = 1000 \frac{rad}{s}$
$\rho_1 = \rho_2 = 7800\ \frac{kg}{m^3}$
$\mu = 0.3$

Příklad 2:

Dáno: D, d, ρ, ω
Určete změnu D.



Řešení 2:

základní rovnice:

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} - \frac{3+\mu}{8} \cdot \omega^2 \cdot \rho \cdot r^2$$

$$\sigma_t = A + \frac{B}{r^2} - \frac{1+3\cdot\mu}{8} \cdot \omega^2 \cdot \rho \cdot r^2$$

$$u = r \cdot \varepsilon_t = \frac{r}{E} \cdot (\sigma_t - \mu \cdot \sigma_r) = A \cdot \frac{1-\mu}{E} \cdot r + B \cdot \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{1}{r} - \rho \cdot \omega^2 \cdot \frac{1-\mu^2}{8 \cdot E} \cdot r^3$$

okrajové podmínky:

$$\sigma_r\big|_{r=\frac{D}{2}} = 0$$

$$u\big|_{r=\frac{d}{2}} = 0$$

Řešení 2:

řešení soustavy rovnic

$$A - B \cdot \frac{4}{D^2} = \omega^2 \cdot \rho \cdot \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{D^2}{4}$$

$$A \cdot \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{d}{2} + B \cdot \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{2}{d} = \omega^2 \cdot \rho \cdot \frac{1-\mu^2}{8 \cdot E} \cdot \frac{d^3}{8}$$

$$A - B \cdot \frac{4}{D^2} = \omega^2 \cdot \rho \cdot \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{D^2}{4}$$

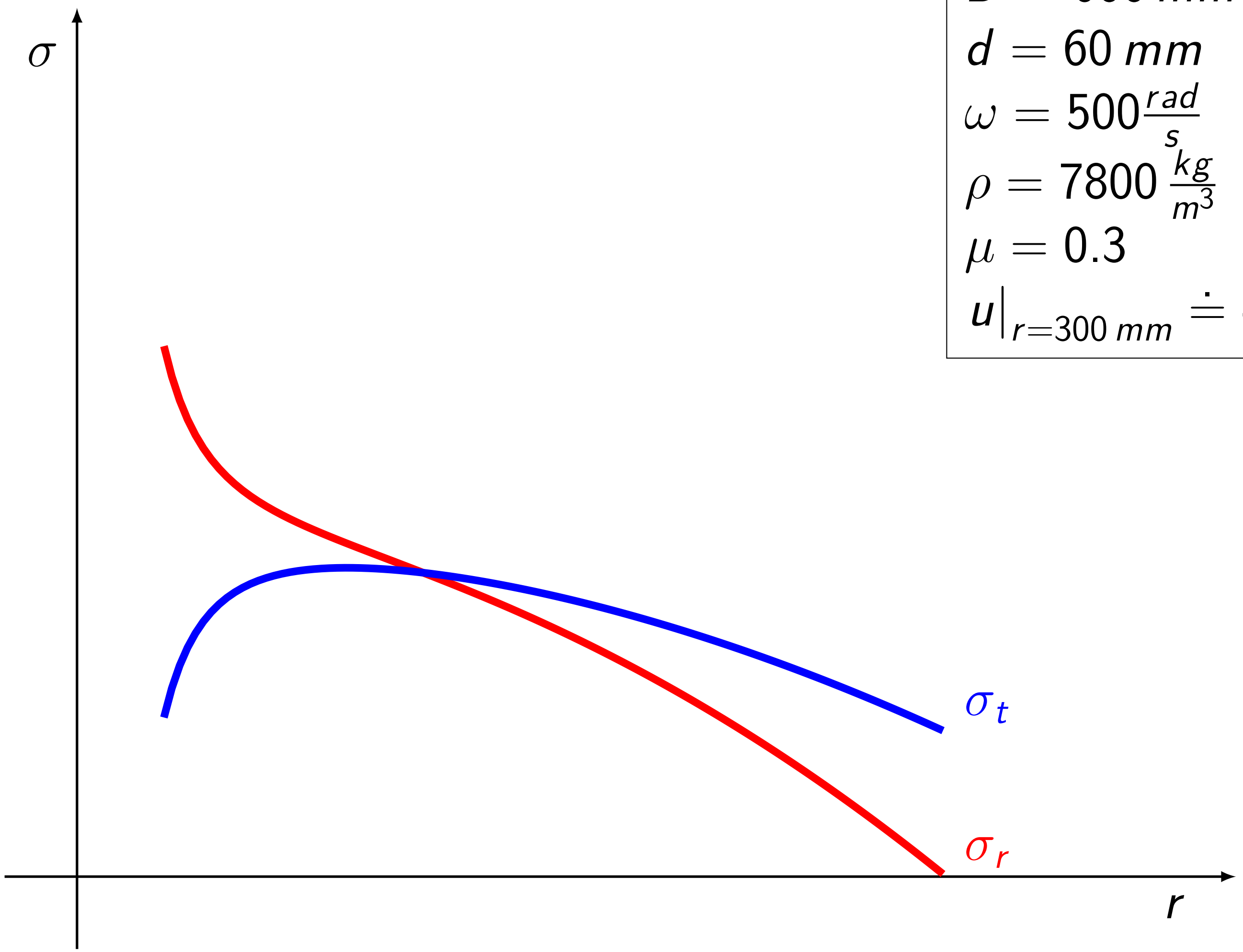
$$A + B \cdot \frac{1+\mu}{1-\mu} \cdot \frac{4}{d^2} = \omega^2 \cdot \rho \cdot \frac{1+\mu}{8} \cdot \frac{d^2}{4}$$

$$B \cdot \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \cdot \frac{4}{d^2} + \frac{4}{D^2} \right) = \omega^2 \cdot \rho \cdot \left(\frac{1+\mu}{8} \cdot \frac{d^2}{4} - \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{D^2}{4} \right)$$

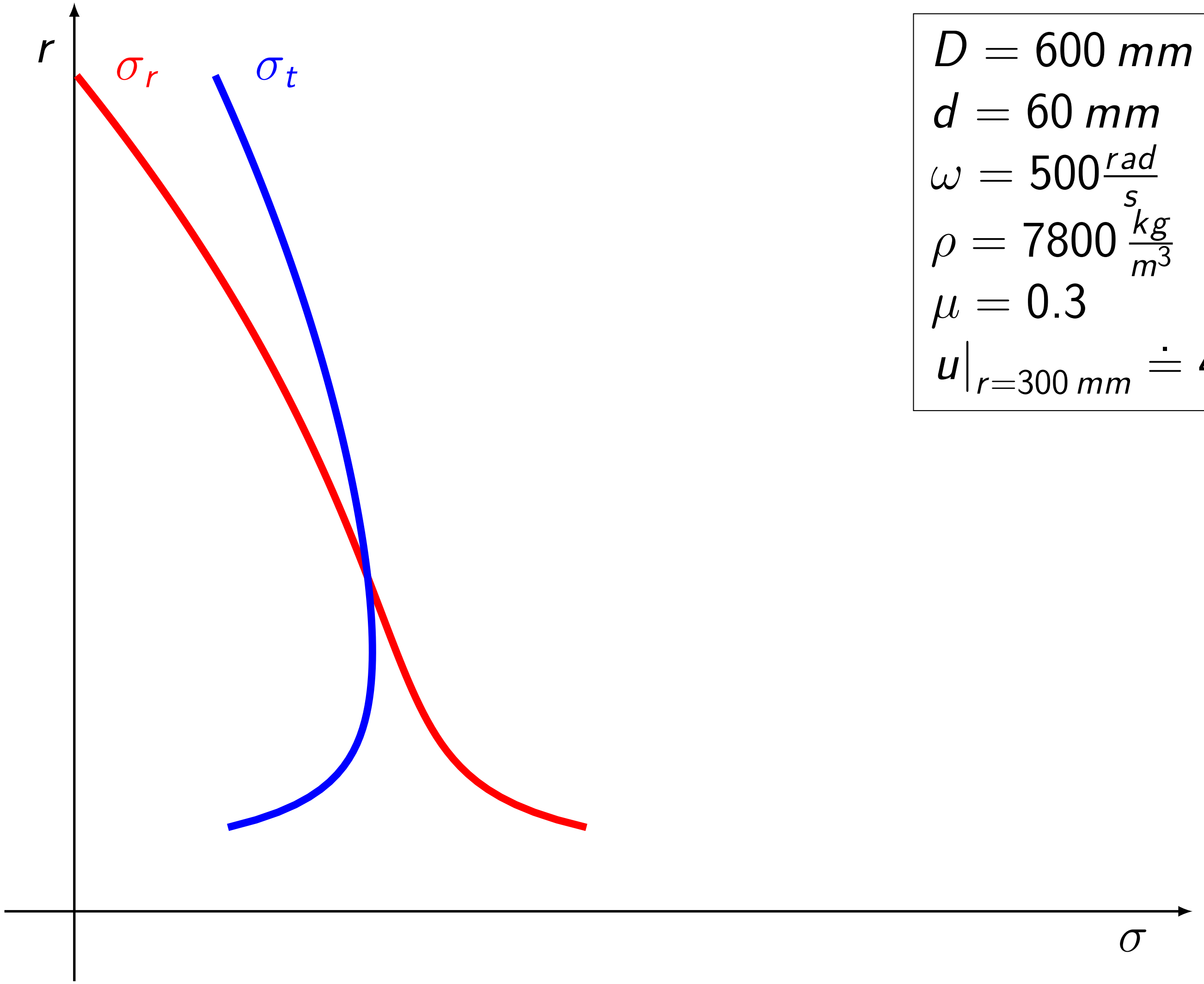
$$\vdots$$

Řešení 2:

$$D = 600\ mm$$
$$d = 60\ mm$$
$$\omega = 500 \frac{rad}{s}$$
$$\rho = 7800 \frac{kg}{m^3}$$
$$\mu = 0.3$$
$$u\big|_{r=300\ mm} \doteq 4 \cdot 10^{-8} mm$$



Řešení 2:



$$D = 600\ mm$$
$$d = 60\ mm$$
$$\omega = 500 \frac{rad}{s}$$
$$\rho = 7800\ \frac{kg}{m^3}$$
$$\mu = 0.3$$
$$u\big|_{r=300\ mm} \doteq 4 \cdot 10^{-8} mm$$