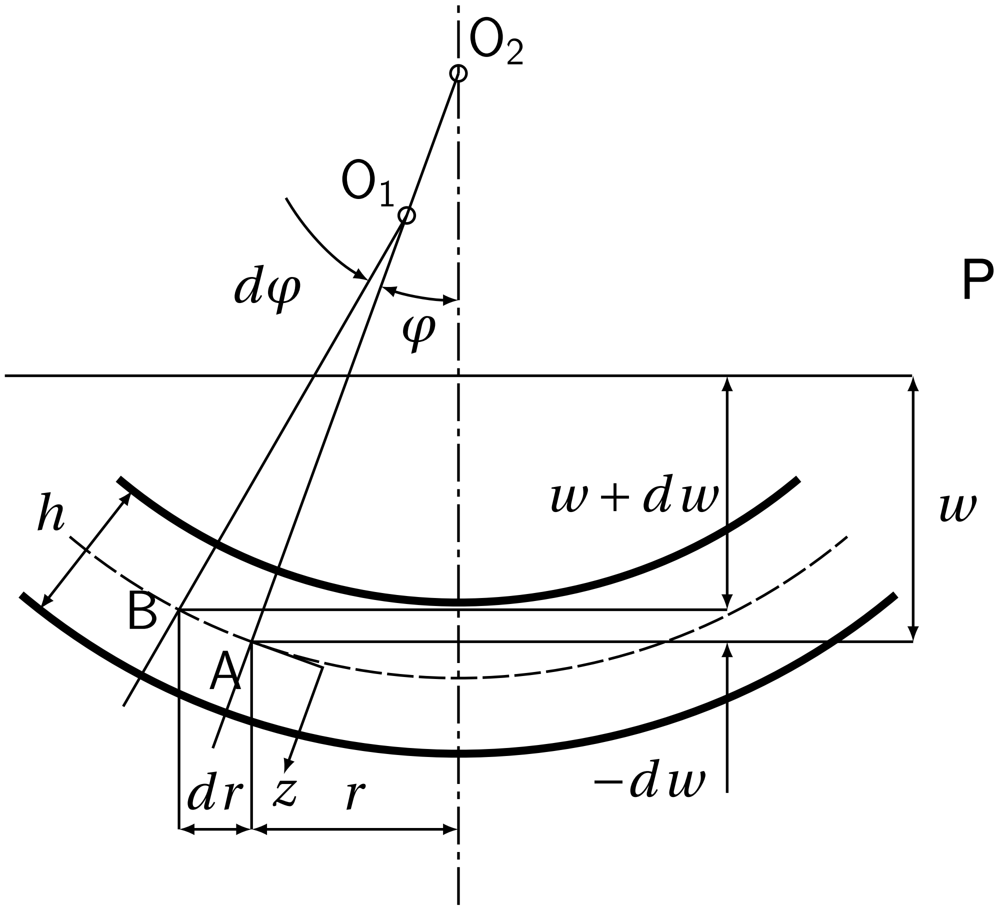
Odvození 1:



Poměrné prodloužení v radiálním směru:

$$r_1 = \text{délka úsečky } \overline{O_1 A}$$

$$\varepsilon_r = \frac{(r_1 + z)\cdot d\varphi - r_1 \cdot d\varphi}{r_1 \cdot d\varphi} = \frac{z}{r_1}$$

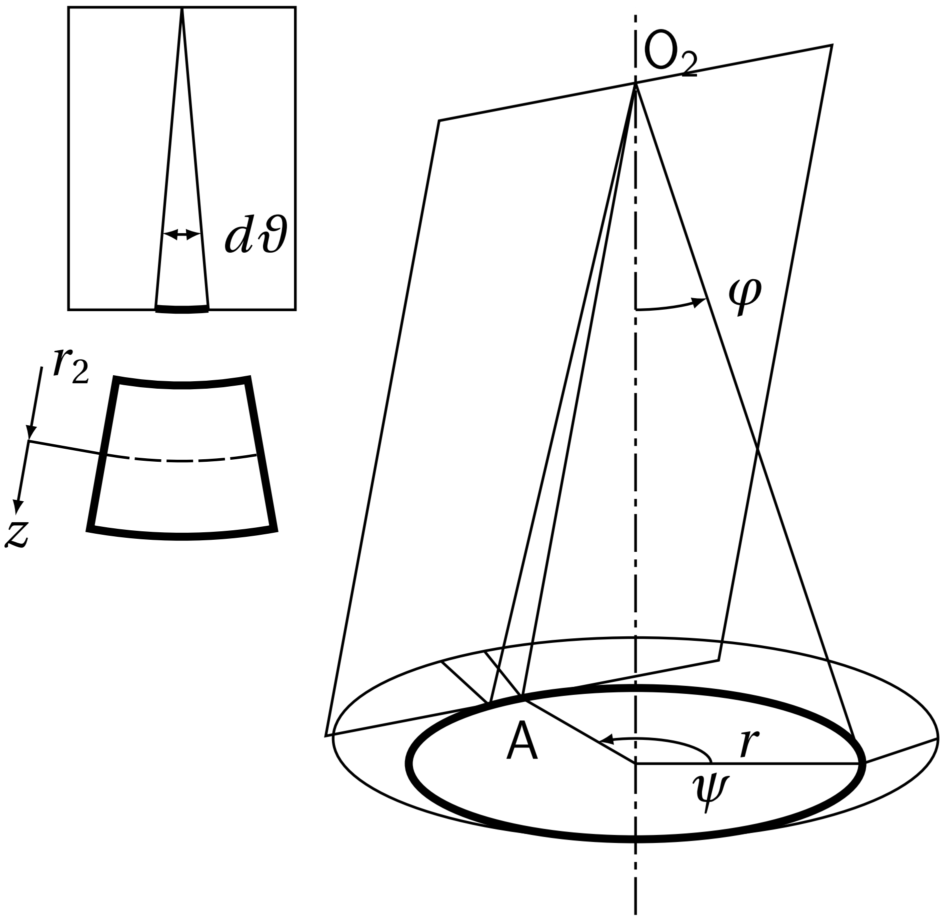
Pro malé hodnoty φ platí:

$$\overline{AB} = r_1 \cdot d\varphi \doteq dr$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{d\varphi}{dr}$$

$$\varepsilon_r = z \cdot \frac{d\varphi}{dr}$$

Odvození 1:



Poměrné prodloužení v tečném směru:

$r_2 =$ délka úsečky $\overline{O_2A}$

$$\varepsilon_t = \frac{(r_2+z)\cdot d\vartheta - r_2 \cdot d\vartheta}{r_2 \cdot d\vartheta} = \frac{z}{r_2}$$

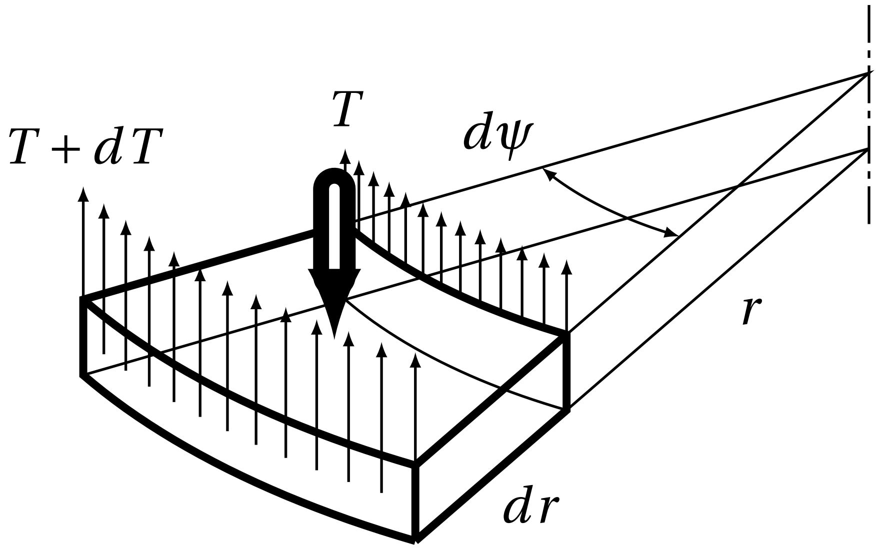
Pro malé hodnoty φ platí:

$$r = r_2 \cdot \sin\varphi \doteq r_2 \cdot \varphi$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{\varphi}{r}$$

$$\varepsilon_t = z \cdot \frac{\varphi}{r}$$

Odvození 1:



Rovnováha posouvajících sil:

$$(T+dT)\cdot(r+dr)\cdot d\psi - T\cdot r\cdot d\psi - \\ - p\cdot r\cdot d\psi\cdot dr = 0$$

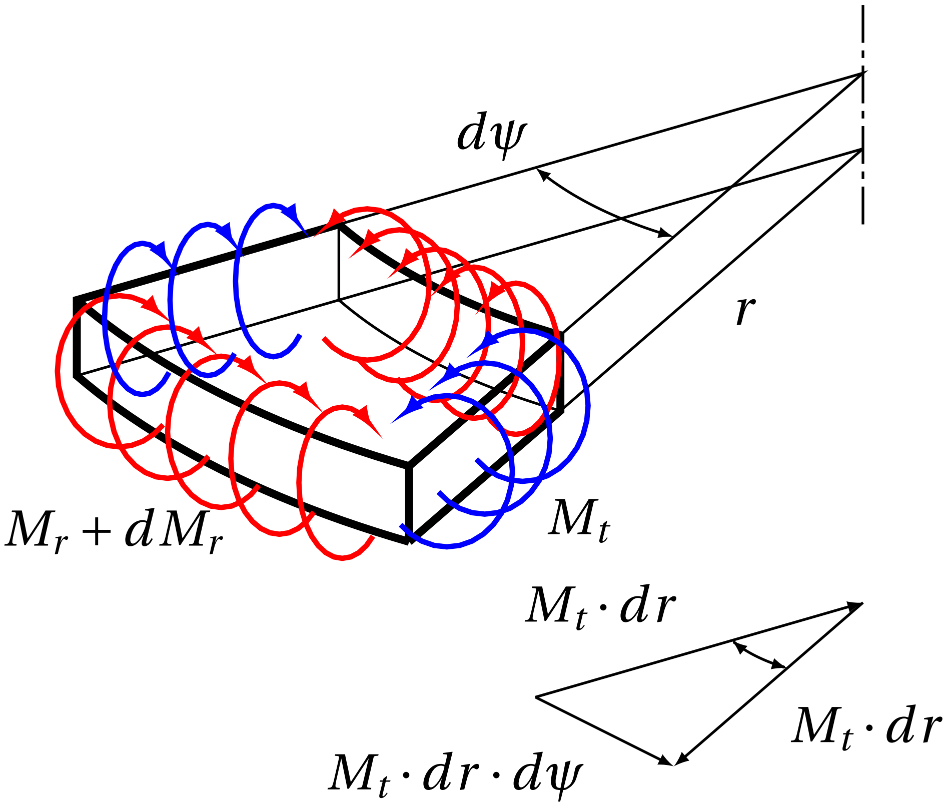
$$d(T\cdot r) - p\cdot r\cdot dr = 0$$

$$\frac{d}{dr}(T\cdot r) = p\cdot r$$

Důležité:

$$[T] = \frac{N}{m} \quad !$$

Odvození 1:



Rovnováha ohybových momentů:

$$(M_r + dM_r)\cdot(r+dr)\cdot d\psi - M_r\cdot r\cdot d\psi - \\ - M_t\cdot dr\cdot d\psi + T\cdot r\cdot d\psi\cdot dr = 0$$

$$\frac{d}{dr}(M_r\cdot r) - M_t = -T\cdot r$$

Důležité:

$$[M] = \frac{N\cdot m}{m} \quad !$$

Odvození 1:

Vyjádření výsledných momentů pomocí napětí:

$$M_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r \cdot z \cdot dz, \quad M_t = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_t \cdot z \cdot dz$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(\varepsilon_r + \mu \cdot \varepsilon_t\right) = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \mu \cdot \frac{1}{r_2}\right) \cdot z$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(\varepsilon_t + \mu \cdot \varepsilon_r\right) = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(\frac{1}{r_2} + \mu \cdot \frac{1}{r_1}\right) \cdot z$$

$$M_r = D \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \mu \cdot \frac{1}{r_2}\right) = D \cdot \left(\frac{d\varphi}{dr} + \mu \cdot \frac{\varphi}{r}\right)$$

$$M_t = D \cdot \left(\frac{1}{r_2} + \mu \cdot \frac{1}{r_1}\right) = D \cdot \left(\frac{\varphi}{r} + \mu \cdot \frac{d\varphi}{dr}\right), \quad D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot \left(1-\mu^2\right)}$$

Odvození 1:

Dosazení do rovnice rovnováhy momentů:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2} = -\frac{T(r)}{D}$$

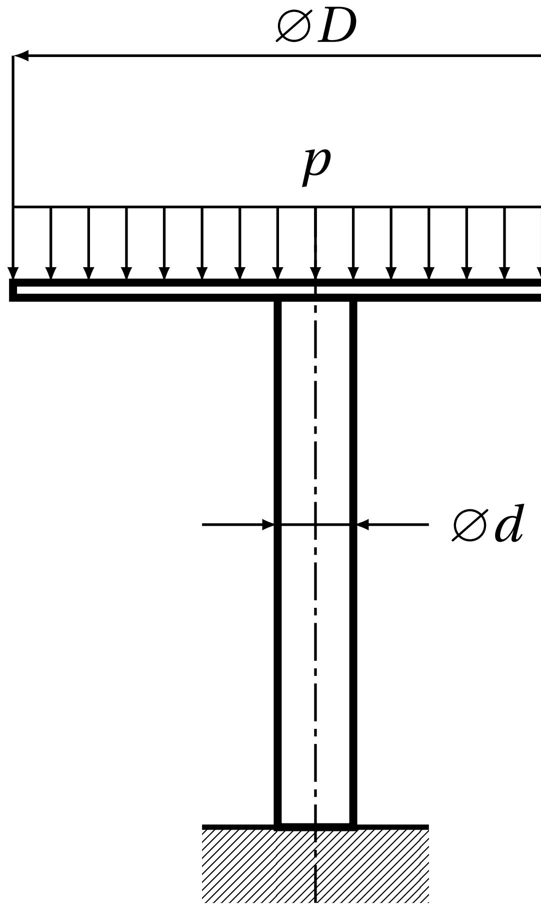
$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}(r \cdot \varphi)\right) = -\frac{T(r)}{D}$$

Řešení $\varphi(r)$ je možno získat dvojnásobnou integrací → 2 integrační konstanty →

2 okrajové podmínky na φ.

Průhyb pak je $w(r) = -\int \varphi(r) \cdot dr$ → další integrační konstanta → další OP na w.

Příklad 1:

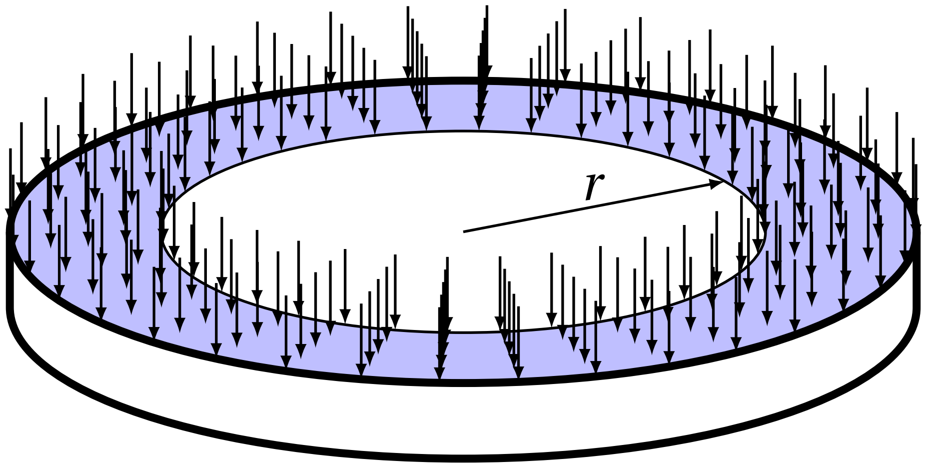


Dáno: E, μ, D, d, p
Určete průhyb desky na obvodu.

Zavedeme:

$$R_1 = \frac{d}{2}, \quad R_2 = \frac{D}{2}$$

Řešení 1:



Průběh $T(r)$:

$$T = p \cdot \frac{\left(R_2^2 - r^2\right)}{2 \cdot r}$$

Diferenciální rovnice:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}(r \cdot \varphi)\right) = -\frac{p}{2 \cdot D} \cdot \left(\frac{R_2^2}{r} - r\right)$$

1. integrace:

$$\frac{d}{dr}(r \cdot \varphi) =$$

$$= C_1 \cdot r - \frac{p}{2 \cdot D} \cdot \left(R_2^2 \cdot r \cdot \log r - \frac{r^3}{2}\right)$$

Řešení 1:

2. integrace:

$$\varphi = C_1 \cdot \frac{r}{2} - \frac{p}{2 \cdot D} \cdot \left(\frac{R_2^2}{r} \cdot \int r \cdot \log r \cdot dr - \frac{r^3}{8} \right) + \frac{C_2}{r}$$

$$\varphi = C_1 \cdot \frac{r}{2} - \frac{p}{2 \cdot D} \cdot \left(\frac{R_2^2}{2} \cdot r \cdot \left(\log r - \frac{1}{2} \right) - \frac{r^3}{8} \right) + \frac{C_2}{r}$$

Průhybová křivka:

$$w = -\left(C_1 \cdot \frac{r^2}{4} - \frac{p}{2 \cdot D} \cdot \left(\frac{R_2^2}{2} \cdot \int r \cdot \log r \cdot dr - \frac{R_2^2}{2} \cdot \frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{32} \right) + C_2 \cdot \log r \right) + C_3$$

Moment M_r:

$$M_r = D \cdot \left(\frac{d\varphi}{dr} + \mu \cdot \frac{\varphi}{r} \right)$$

Řešení 1:

Okrajové podmínky:

podpěra: $w = 0$ a $\varphi = 0$ na $r = R_1$

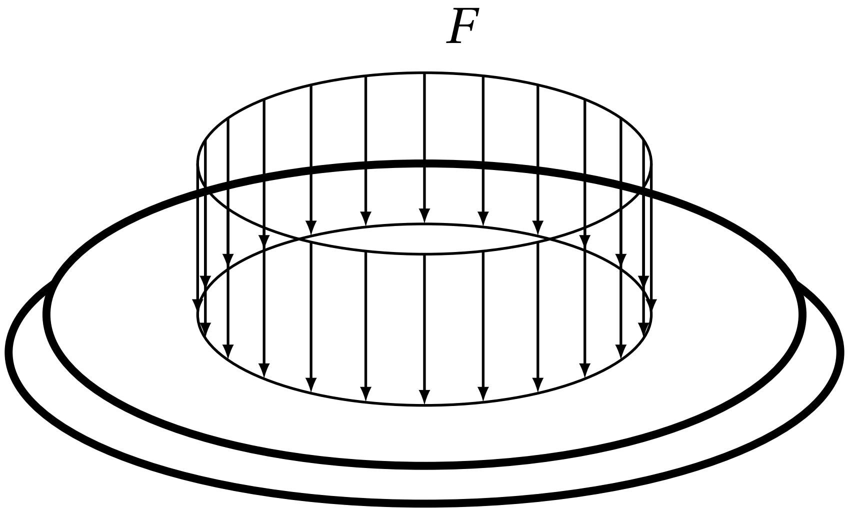
volný okraj: $M_r = 0$ na $r = R_2$ → soustava 3 rovnic o neznámých C_1, C_2 a C_3

$$C_1 \cdot \frac{R_1}{2} + C_2 \cdot \frac{1}{R_1} = \frac{p}{2 \cdot D} \cdot \left(\frac{R_1 \cdot R_2^2}{2} \cdot \left(\log R_1 - \frac{1}{2} \right) - \frac{R_1^3}{8} \right)$$

$$C_1 \cdot \frac{R_1^2}{4} + C_2 \cdot \log R_1 - C_3 = \frac{p}{2 \cdot D} \cdot \left(\frac{R_2^2}{2} \cdot \left(\frac{R_1^2}{2} \cdot \left(\log R_1 - \frac{1}{2} \right) - \frac{R_1^2}{4} \right) - \frac{R_1^4}{32} \right)$$

$$C_1 \cdot \frac{1+\mu}{2} - C_2 \cdot \frac{1+\mu}{R_2^2} = \frac{p}{2 \cdot D} \left(\frac{R_2^2}{2} \cdot \left(\left(\log R_2 + \frac{1}{2} \right) + \mu \cdot \left(\log R_2 - \frac{1}{2} \right) \right) - \frac{3 \cdot R_2^2}{8} - \mu \cdot \frac{R_2^2}{8} \right)$$

Příklad 2:

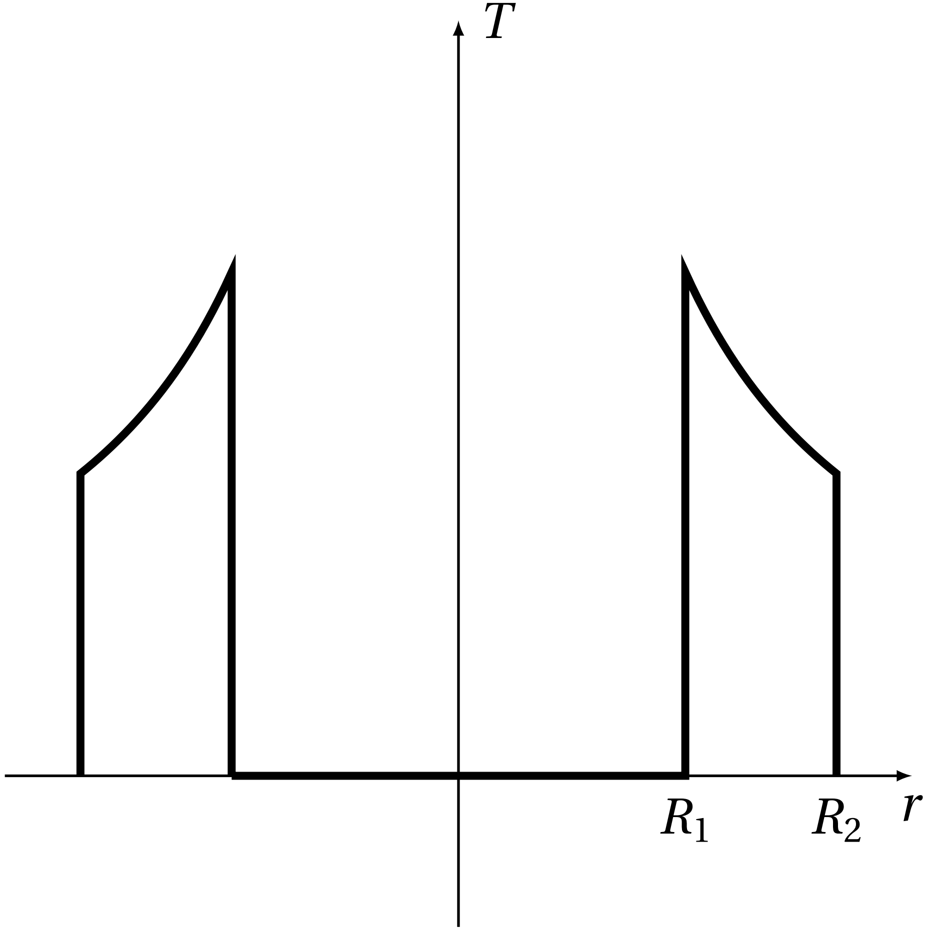


Dáno: E, μ, D, d, F
Určete průhyb desky uprostřed.

Zavedeme:

$$R_1 = \frac{d}{2}, \quad R_2 = \frac{D}{2}$$

Řešení 2:



Průběh $T(r)$:

$$T = \frac{F}{2\cdot\pi\cdot r} \text{ pro } r > R_1,\ T = 0 \text{ pro } r < R_1$$

Diferenciální rovnice:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}(r\cdot\varphi_1)\right) = -\frac{F}{2\cdot\pi\cdot D\cdot r}$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}(r\cdot\varphi_2)\right) = 0;$$

1. integrace:

$$\frac{d}{dr}(r\cdot\varphi_1) = C_{11}\cdot r - \frac{F}{2\cdot\pi\cdot D}\cdot r\cdot\log r$$

$$\frac{d}{dr}(r\cdot\varphi_2) = C_{21}\cdot r$$

Řešení 2:

2. integrace:

$$\varphi_1 = C_{11} \cdot \frac{r}{2} - \frac{F}{2 \cdot \pi \cdot D} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \int r \cdot \log r \cdot dr \right) + \frac{C_{12}}{r} = C_{11} \cdot \frac{r}{2} + \frac{C_{12}}{r} - \frac{F \cdot r}{4 \cdot \pi \cdot D} \cdot \left(\log r - \frac{1}{2} \right)$$

$$\varphi_2 = C_{21} \cdot \frac{r}{2} + \frac{C_{22}}{r}$$

Průhybová křivka:

$$w_1 = -C_{11} \cdot \frac{r^2}{4} + C_{12} \cdot \log r + C_{13} - \frac{F}{4 \cdot \pi \cdot D} \cdot \int \left(r \cdot \log r - \frac{r}{2} \right) dr$$

$$w_2 = -C_{21} \cdot \frac{r^2}{4} + C_{22} \cdot \log r + C_{23}$$

Řešení 2:

Okrajové podmínky: podpěra po obvodu: $w_1 = 0$ na $r = R_2$

volný okraj: $M_r = 0$ na $r = R_2$

spojitost posuvů, natočení a momentů na R_1: $w_1|_{r=R_1} = w_2|_{r=R_1}$, $\varphi_1\big|_{r=R_1} = \varphi_2\big|_{r=R_1}$ a

$$\frac{d\varphi_1}{dr}\bigg|_{r=R_1} + \mu \cdot \frac{\varphi_1}{R_1} = \frac{d\varphi_2}{dr}\bigg|_{r=R_1} + \mu \cdot \frac{\varphi_2}{R_1}$$

situace v $r = 0$: $\varphi_2 = 0 \rightarrow$ 6 rovnic pro 6 neznámých