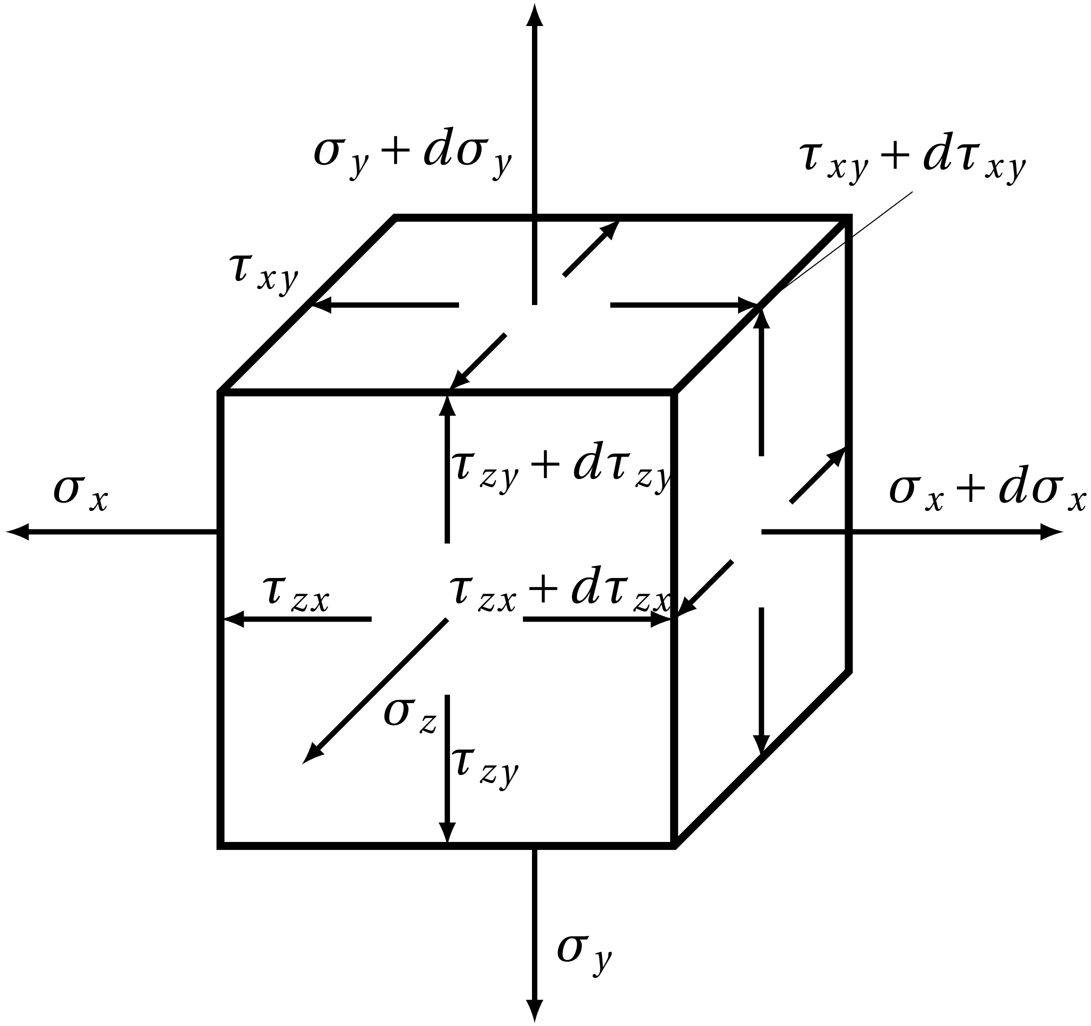
Odvození 1: základní rovnice teorie pružného kontinua

(též základní rovnice lineární pružnosti)



Rovnice rovnováhy elementu:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = -X,$$
$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -Y,$$
$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -Z,$$

kde X, Y a Z jsou objemové síly; $[X] = [Y] = [Z] = \frac{N}{m^3}$

Odvození 1:

Fyzikální rovnice (též konstitutivní vztahy, Hookův zákon pro izotropní kontinuum)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\cdot\left(\sigma_x - \mu\cdot\sigma_y - \mu\cdot\sigma_z\right),\quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\cdot\tau_{xy}$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\cdot\left(\sigma_y - \mu\cdot\sigma_z - \mu\cdot\sigma_x\right),\quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\cdot\tau_{yz}$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\cdot\left(\sigma_z - \mu\cdot\sigma_x - \mu\cdot\sigma_y\right),\quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\cdot\tau_{zx}$$

Cauchyho vztahy pro deformaci (složky Cauchyho tenzoru deformací)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},\quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},\quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Odvození 1:

Závislost mezi složkami tenzoru deformací (též rovnice kompatibility)

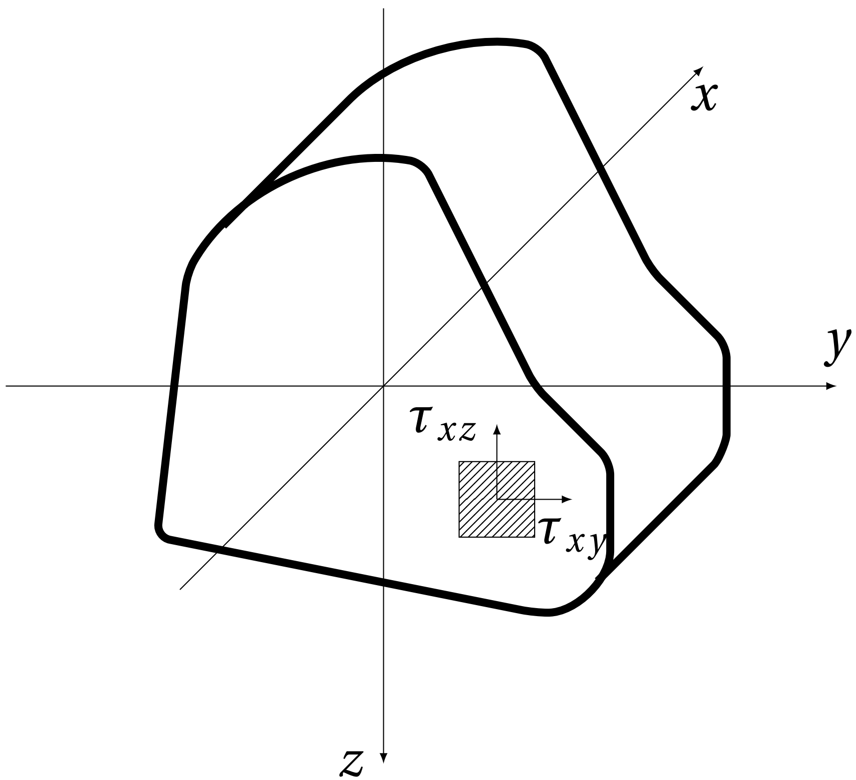
$$\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x} = \frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}$$

$$2\cdot\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$2\cdot\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right)$$

$$2\cdot\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}\right)$$

Odvození 1: rovnoměrný krut tyčí s obecným plným průřezem



Předpoklady:

1. Objemové síly nulové.
2. Pouze smyková napětí:

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$u = u(y, z), \quad v = v(z, x), \quad w = w(z, x)$$

3. Příčné řezy zachovávají tvar:

$$\tau_{yz} = 0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

Jediné nenulové složky tenzoru napětí tedy jsou τ_{xy} a τ_{zx}.

Odvození 1: rovnoměrný krut tyčí s obecným plným průřezem

Rovnice rovnováhy mají tvar:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = 0$$

Položíme $\Phi = \Phi\left(y, z\right)$ tak, aby 1. rovnice rovnováhy byla splněna identicky:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

Rovnice kompatibility:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z}\right) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y}\right) = 0$$

Odvození 1: rovnoměrný krut tyčí s obecným plným průřezem

Vyjádřením τ pomocí Φ dostaneme:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)=0$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)=0$$

Musí tudíž platit:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=K=konst.$$

Poissonova rovnice: její řešení je jednoznačně určeno okrajovými podmínkami.

Odvození 1: rovnoměrný krut tyčí s obecným plným průřezem

Na povrchu plného průřezu je smykové napětí nenulové pouze v rovině tečné k povrchu:

$$\tau_{zx} \cdot dS \cdot \cos(n,z) + \tau_{xy} \cdot dS \cdot \cos(n,y) = 0$$

Protože $\cos(n,y) = \frac{\partial z}{\partial s}$ a $\cos(n,z) = -\frac{\partial y}{\partial s}$, dostaneme:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s} = 0 \rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0 \rightarrow \Phi = konst. \text{ na obvodu}$$

Bez újmy na obecnosti můžeme volit $\Phi = 0$ na obvodu průřezu.

Význam konstanty K v Poissonově rovnici:

$$K = -2 \cdot G \cdot \vartheta$$

Odvození 1: membránová analogie

rovnice membrány zatížené tlakem

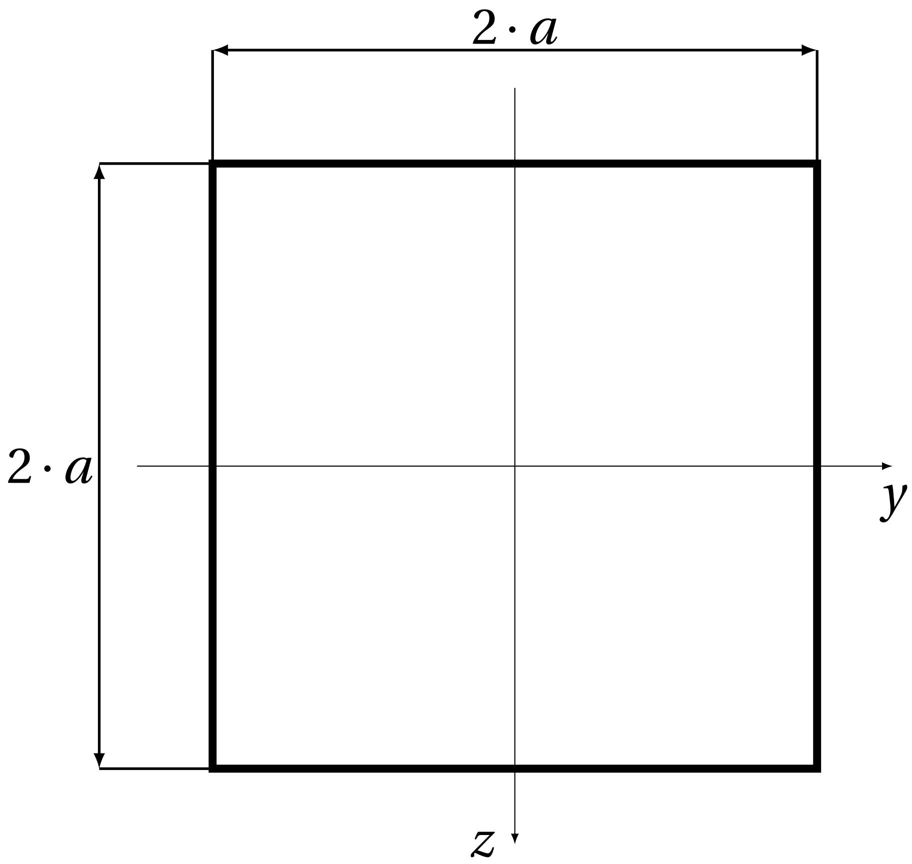
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -\frac{p}{F}$$

Položíme $\Phi = \xi$ a $2 \cdot G \cdot \vartheta = \frac{p}{F}$:

$$2 \cdot \iint_S \xi\left(y, z\right) dy \cdot dz = M_k$$

Dvojnásobek objemu pod prohnutou membránou je **číselně** roven kroutícímu momentu.

Příklad 1:



Dáno: a

Určete J_k.

Průhyb membrány nad čtvercovým otvorem:

$$\xi \doteq \frac{5}{16 \cdot a^2} \cdot \frac{p}{F} \cdot \left(a^2 - y^2\right) \cdot \left(a^2 - z^2\right)$$

Řešení 1:

$$2 \cdot \iint_S \xi\left(y,z\right) dy \cdot dz = M_k, \quad 2 \cdot G \cdot \vartheta = \frac{p}{F}$$

$$M_k = 2 \cdot \iint_S \frac{5}{16 \cdot a^2} \cdot 2 \cdot G \cdot \vartheta \cdot \left(a^2 - y^2\right) \cdot \left(a^2 - z^2\right) dy \cdot dz =$$

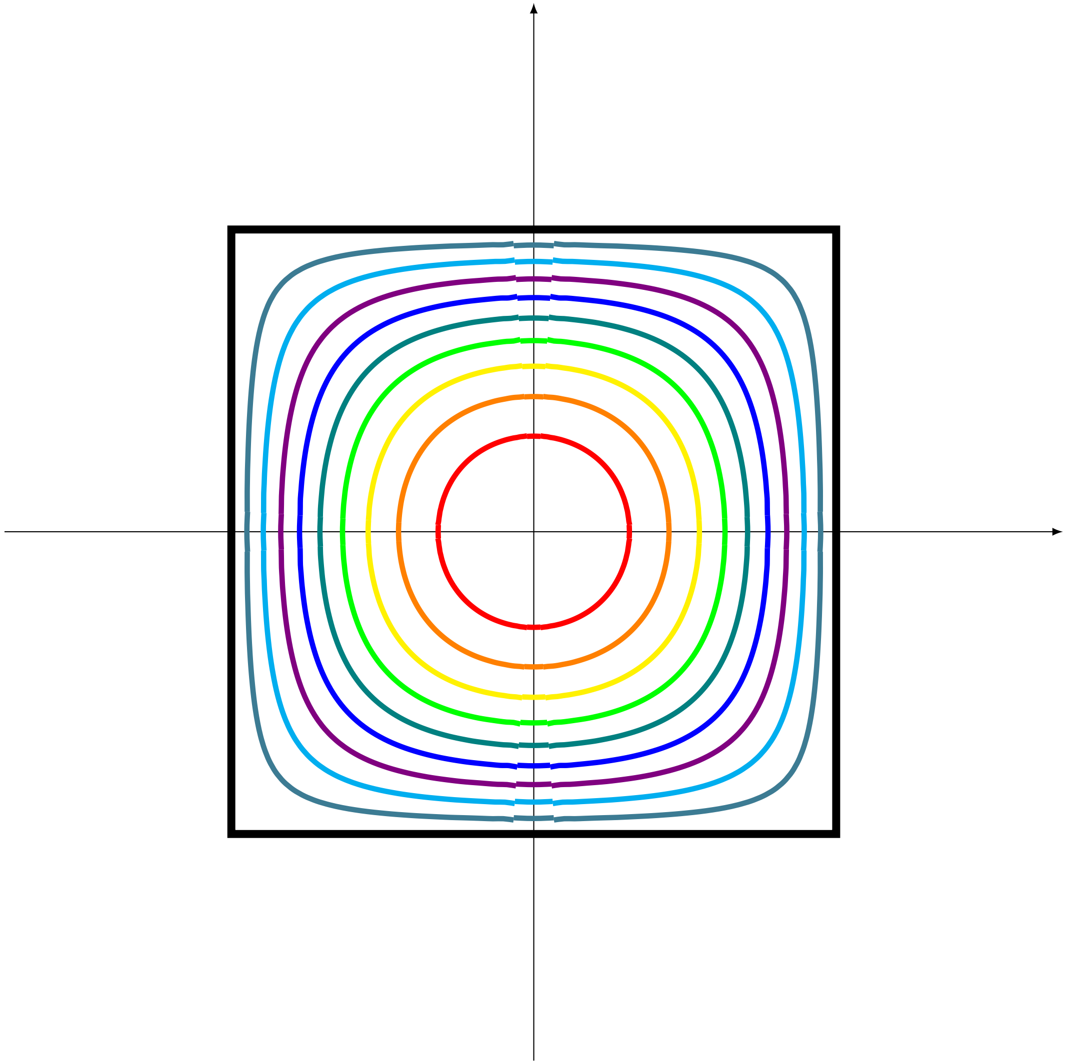
$$= \frac{10}{8} \cdot \frac{G \cdot \vartheta}{a^2} \cdot \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} \left(a^2 - y^2\right) \cdot \left(a^2 - z^2\right) dy \cdot dz =$$

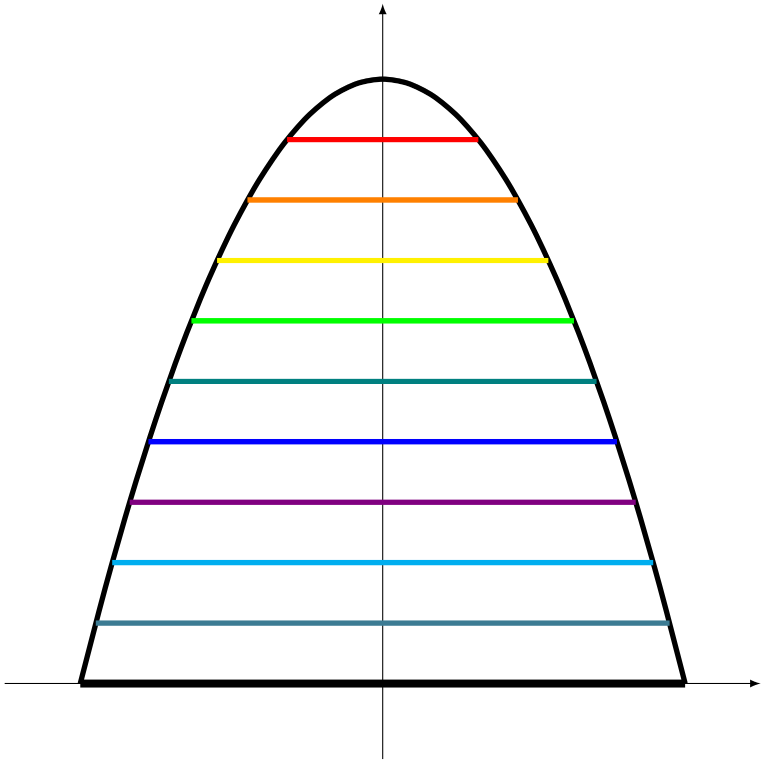
$$= \frac{10}{8} \cdot \frac{G \cdot \vartheta}{a^2} \cdot \int_{-a}^{a} \left(a^2 - z^2\right) \cdot \left[a^2 \cdot y - \frac{y^3}{3}\right]_{-a}^{a} \cdot dz =$$

$$= \frac{10}{8} \cdot \frac{G \cdot \vartheta}{a^2} \cdot \left(\frac{4 \cdot a^3}{3}\right)^2$$

$$M_k = \frac{20}{9} \cdot G \cdot \vartheta \cdot a^4 = G \cdot J_k \cdot \vartheta \rightarrow J_k = \frac{20}{9} \cdot a^4$$

Řešení 1:





Řešení 1: