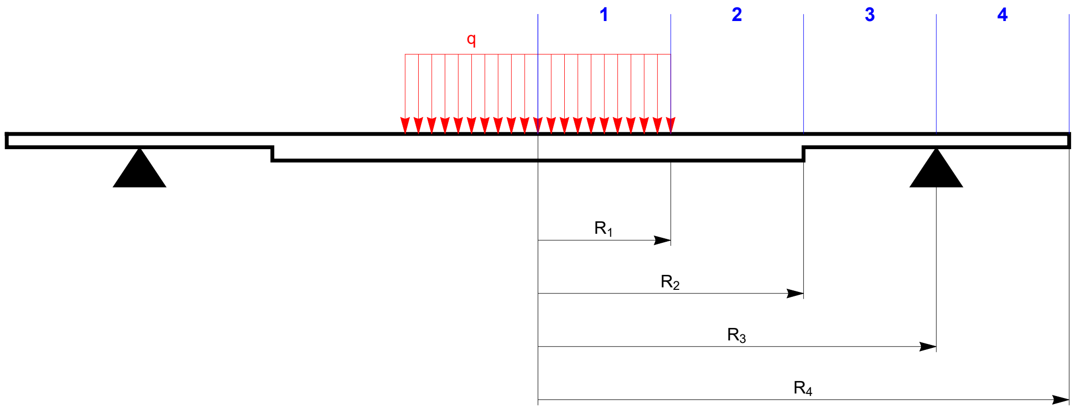
In[1]:= `ClearAll["Global`*"]`

Ohýbaná deska

Deska je zatížena a uložena podle obrázku

In[2]:=
$$\text{cisla} = \left\{R_1 \to 0.1,\ R_2 \to 0.2,\ R_3 \to 0.3,\ R_4 \to 0.4,\ h_1 \to 0.02,\ h_2 \to 0.02,\ h_3 \to 0.01,\ h_4 \to 0.01,\ D_1 \to \frac{\mathbb{E}\, h_1^3}{12\,(1-\mu^2)},\ D_2 \to \frac{\mathbb{E}\, h_2^3}{12\,(1-\mu^2)},\ D_3 \to \frac{\mathbb{E}\, h_3^3}{12\,(1-\mu^2)},\ D_4 \to \frac{\mathbb{E}\, h_4^3}{12\,(1-\mu^2)},\ \mathbb{E} \to 2.1\times 10^{11},\ \mu \to 0.3,\ q \to 150000\right\};$$

Out[3]=


Rozměry jsou:

Out[4]=
$$R_1 == 0.1\,\text{m}$$
$$R_2 == 0.2\,\text{m}$$
$$R_3 == 0.3\,\text{m}$$
$$R_4 == 0.4\,\text{m}$$

Out[5]=
$$h_1 == 0.02\,\text{m}$$
$$h_2 == 0.02\,\text{m}$$
$$h_3 == 0.01\,\text{m}$$
$$h_4 == 0.01\,\text{m}$$

V jednotlivých částech desky známe řešení pro φ. Je to součet homogenního a partikulárního řešení pro pravou stranu diferenciální rovnice, kterou v každém úseku snadno určíme.

Platí tedy následující vztahy

In[6]:=
$$\varphi_1 = A_1\, r + \frac{B_1}{r} - \frac{q}{16\, D_1}\, r^3;$$
$$\varphi_2 = A_2\, r + \frac{B_2}{r} - \frac{q\, R_1{}^2}{D_2}\left(\frac{r}{2}\,\text{Log}[r] - \frac{r}{4}\right);$$
$$\varphi_3 = A_3\, r + \frac{B_3}{r} - \frac{q\, R_1{}^2}{D_3}\left(\frac{r}{2}\,\text{Log}[r] - \frac{r}{4}\right);$$
$$\varphi_4 = A_4\, r + \frac{B_4}{r};$$

Určím radiální a tečné napětí v kadžém z úseků

In[10]:=

$$\left(\sigma r_{\#} = \frac{\mathbb{E}\, h_{\#}}{2\,(1-\mu^2)}\left(D[\varphi_{\#}, r] + \mu\,\frac{\varphi_{\#}}{r}\right)\right) \,\&\, /@\, \mathrm{Range}[4];$$

$$\left(\sigma t_{\#} = \frac{\mathbb{E}\, h_{\#}}{2\,(1-\mu^2)}\left(\frac{\varphi_{\#}}{r} + \mu\, D[\varphi_{\#}, r]\right)\right) \,\&\, /@\, \mathrm{Range}[4];$$

Okrajové podmínky - na vnější okraji nulové radiální napětí, uprostřed konečná hodnota φ.
Přechodové podmínky - na hranicích úseků shodné φ a příslušné vztahy pro radiální napětí.

In[12]:=

$$\begin{aligned}\mathrm{op} = \{&B_1 == 0,\\ &(\sigma r_4 \;/.\; r \to R_4) == 0,\\ &(\varphi_1 == \varphi_2) \;/.\; r \to R_1,\\ &(\sigma r_1 == \sigma r_2) \;/.\; r \to R_1,\\ &(\varphi_2 == \varphi_3) \;/.\; r \to R_2,\\ &(\sigma r_2\, h_2{}^2 == \sigma r_3\, h_3{}^2) \;/.\; r \to R_2,\\ &(\varphi_3 == \varphi_4) \;/.\; r \to R_3,\\ &(\sigma r_3 == \sigma r_4) \;/.\; r \to R_3\} \;//\; \mathrm{Simplify};\end{aligned}$$

Z okrajových podmínek určíme integrační konstanty

In[13]:=

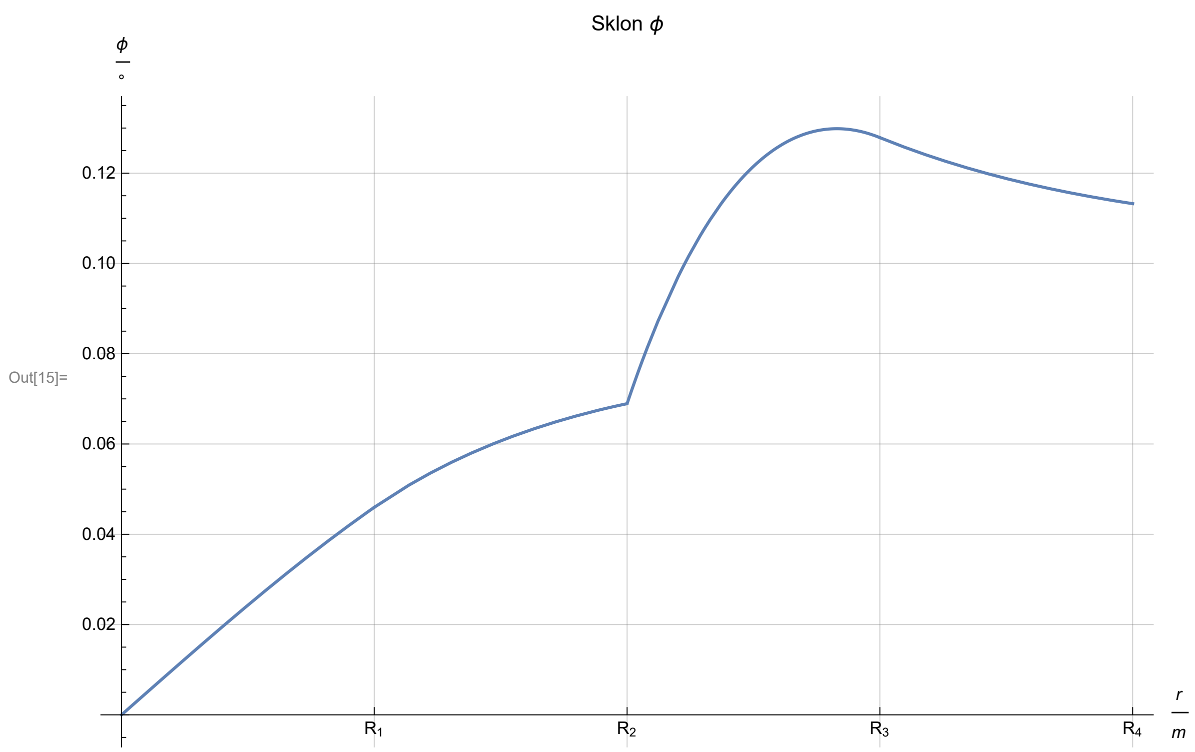
$$\mathrm{konst1} = \mathrm{Solve}[\mathrm{op}, \{A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4\}][[1]];$$

Vyřešené konstanty dosadíme do vztahů pro φ a popíšeme ϕ po celé desce, jako po částech definovanou funkci

In[14]:=

$$\phi = \begin{cases} \varphi_1 & 0 \le r < R_1 \\ \varphi_2 & R_1 \le r < R_2 \\ \varphi_3 & R_2 \le r < R_3 \\ \varphi_4 & R_3 \le r \le R_4 \end{cases} \;/.\; \mathrm{konst1} \;//.\; \mathrm{cisla} \;//\; \mathrm{Simplify};$$

Out[15]=



Zapíšeme vztahy pro průhyby

In[16]:=
```
(w# = ∫(φ# /. konst1) ⅆr + C#) & /@ Range[4];
```

... a příslušné okrajové podmínky:

In[17]:=
```
op2 = {(w1 == w2) /. r → R1,
   (w2 == w3) /. r → R2,
   (w3 == w4) /. r → R3,
   (w4 == 0) /. r → R3};
```

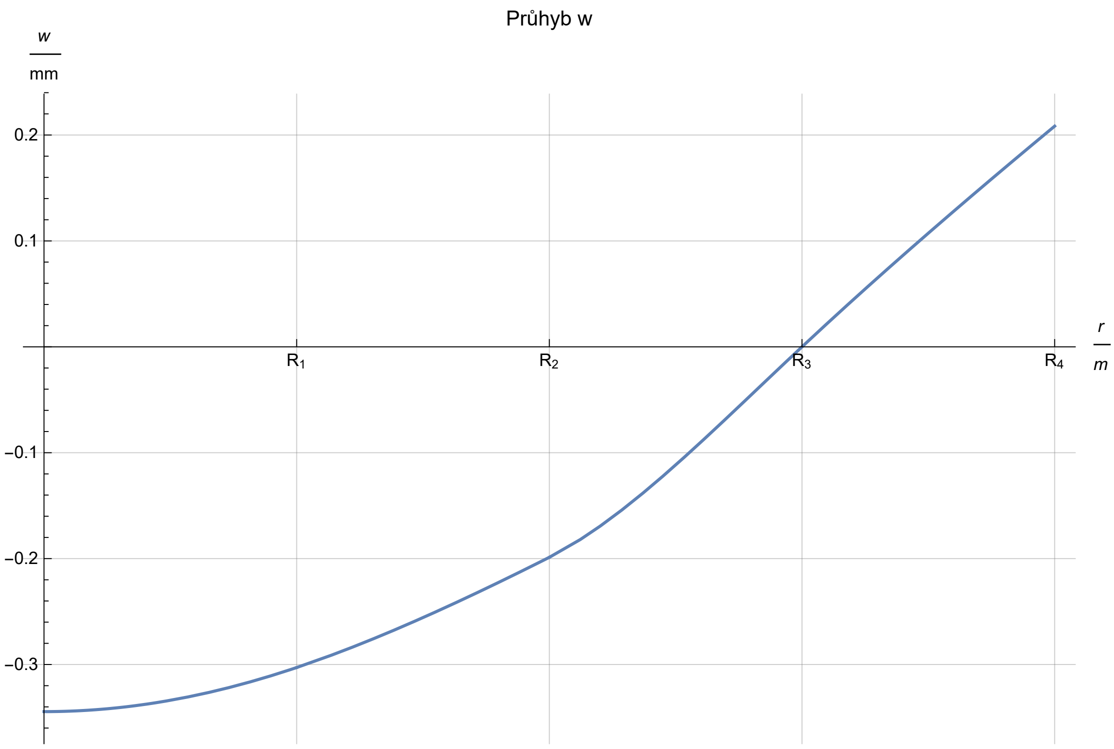
Určíme hodnoty integračních konstant C_i

In[18]:=
```
konst2 = Solve[op2, {C1, C2, C3, C4}][[1]];
```

Průhyb w definovaný po částech:

In[19]:=
$$W = \begin{cases} w_1 & 0 \le r < R_1 \\ w_2 & R_1 \le r < R_2 \\ w_3 & R_2 \le r < R_3 \\ w_4 & R_3 \le r \le R_4 \end{cases} \texttt{ /. konst2 //. cisla // Simplify;}$$

Out[20]=



Napětí definovaná po částech

In[21]:=
$$\sigma R = \begin{cases} \sigma r_1 & 0 \le r < R_1 \\ \sigma r_2 & R_1 \le r < R_2 \\ \sigma r_3 & R_2 \le r < R_3 \\ \sigma r_4 & R_3 \le r \le R_4 \end{cases} \texttt{ /. konst1 //. cisla // Simplify;}$$

$$\sigma T = \begin{cases} \sigma t_1 & 0 \le r < R_1 \\ \sigma t_2 & R_1 \le r < R_2 \\ \sigma t_3 & R_2 \le r < R_3 \\ \sigma t_4 & R_3 \le r \le R_4 \end{cases} \texttt{ /. konst1 //. cisla // Simplify;}$$

Out[23]=