In[1]:= `ClearAll["Global`*"]`

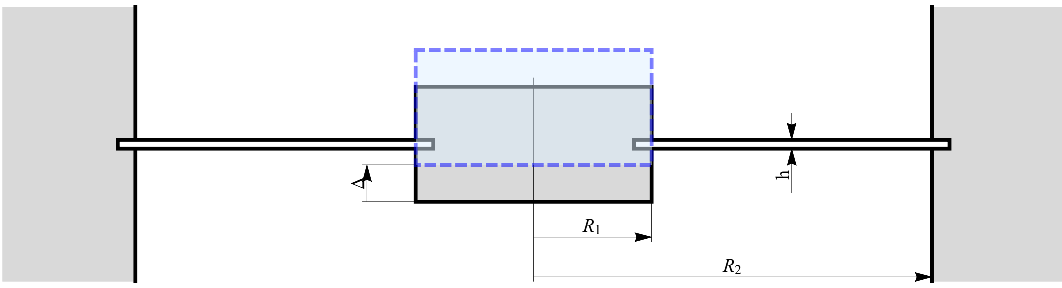
Staticky neurčitá kruhová deska

In[2]:= $\text{cisla} = \{R_1 \to 150\times10^{-3},\ R_2 \to 470\times10^{-3},\ h \to 0.3\times10^{-3},\ \mathbb{E} \to 2.1\times10^{11},\ \mu \to 0.3,\ \Delta \to 25\times10^{-3}\};$

Deska je na vnitřním i vnějším obvodu vetknutá. Vnitřní obvod desky je poté přesunut v osovném směru o Δ - viz obrázek.

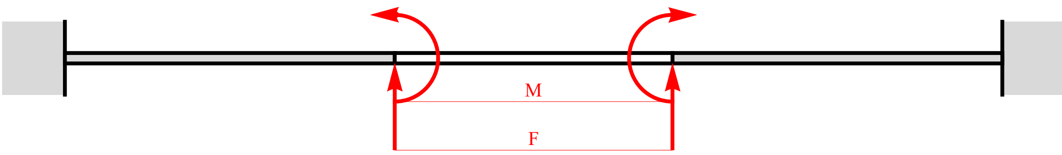
Určete tvar desky, napětí v desce a potřebnou sílu

Out[3]=



Když střed posuneme nahoru, bude na vnitřním obvodě desky působit (zatím neznámá) síla F a (zatím neznámý) moment M - viz obrázek.

Out[4]=



Veličina Q bude pro tento případ mít tvar

In[5]:= $Q = \frac{-F}{2\pi x};$

a pravá strana diferenciální rovnice pro sklon desky má tento tvar:

In[6]:= $PS = -\frac{Q}{\mathbb{D}}$

Out[6]= $\frac{F}{2\pi x \mathbb{D}}$

kde $\mathbb{D}$ je

In[7]:= $\mathbb{D} = \frac{\mathbb{E}\, h^3}{12\,(1-\mu^2)};$

Jedná se tedy o tvar $A\cdot x^{-1}$, kde konstanta A má hnodnotu

In[8]:= `A = Coefficient[PS, x, -1]`

Out[8]= $\frac{6\,F\,(1-\mu^2)}{h^3\,\pi\,\mathbb{E}}$

Řešení je

In[9]:= $\varphi = A\left(\frac{x}{2}\,\text{Log}[x] - \frac{x}{4}\right) + C_1\,x + \frac{C_2}{x};$

Pro průhyb platí vztah

In[10]:=
$$w = \int \varphi \, dx + C_3;$$

a napětí je určeno těmito vztahy

In[11]:=
$$\sigma_r = \frac{\mathbb{E}\, h}{2\left(1-\mu^2\right)} \left(D[\varphi, x] + \mu \frac{\varphi}{x}\right);$$
$$\sigma_t = \frac{\mathbb{E}\, h}{2\left(1-\mu^2\right)} \left(\frac{\varphi}{x} + \mu\, D[\varphi, x]\right);$$

Na vnitřním obvodě bude nulový sklon. Průhyb na vnitřním obvodě je roven předepsané hodnotě Δ. Na vnějším obvodě desky bude také nulový sklon a průhyb bude nulový. Tyto čtyři okrajové podmínky zapíšeme

In[13]:=
$$\begin{aligned} op = \{\; & (\varphi == 0)\ /.\ x \to R_1, \\ & (w == \Delta)\ /.\ x \to R_1, \\ & (\varphi == 0)\ /.\ x \to R_2, \\ & (w == 0)\ /.\ x \to R_2 \\ \}; \end{aligned}$$

a stanovíme z nich integrační konstanty a velikost síly F:

In[14]:=
$$resOP = Solve[op, \{C_1, C_2, C_3, F\}][[1]]\ //\ Simplify$$

Out[14]=
$$\begin{aligned} \{ & C_1 \to \left(2 \Delta \left((-1 + 2\, Log[R_1])\, R_1^2 + (1 - 2\, Log[R_2])\, R_2^2\right)\right) / \\ & \quad \left(R_1^4 - 2\left(1 + 2\, Log[R_1]^2 - 4\, Log[R_1]\, Log[R_2] + 2\, Log[R_2]^2\right) R_1^2 R_2^2 + R_2^4\right), \\ & C_2 \to -\left(\left(4 \Delta\, (Log[R_1] - Log[R_2])\, R_1^2 R_2^2\right) / \right. \\ & \quad \left.\left(R_1^4 - 2\left(1 + 2\, Log[R_1]^2 - 4\, Log[R_1]\, Log[R_2] + 2\, Log[R_2]^2\right) R_1^2 R_2^2 + R_2^4\right)\right), \\ & C_3 \to \left(\Delta \left(\left(-1 + 2\, Log[R_2] - 4\, Log[R_2]^2 + Log[R_1]\, (-2 + 4\, Log[R_2])\right) R_1^2 R_2^2 + R_2^4\right)\right) / \\ & \quad \left(R_1^4 - 2\left(1 + 2\, Log[R_1]^2 - 4\, Log[R_1]\, Log[R_2] + 2\, Log[R_2]^2\right) R_1^2 R_2^2 + R_2^4\right),\ F \to \left(4\, h^3 \pi\, \mathbb{E}\, \Delta \left(R_1^2 - R_2^2\right)\right) / \\ & \quad \left(3\left(-1 + \mu^2\right)\left(R_1^4 - 2\left(1 + 2\, Log[R_1]^2 - 4\, Log[R_1]\, Log[R_2] + 2\, Log[R_2]^2\right) R_1^2 R_2^2 + R_2^4\right)\right) \} \end{aligned}$$

Vyčíslíme sílu F:

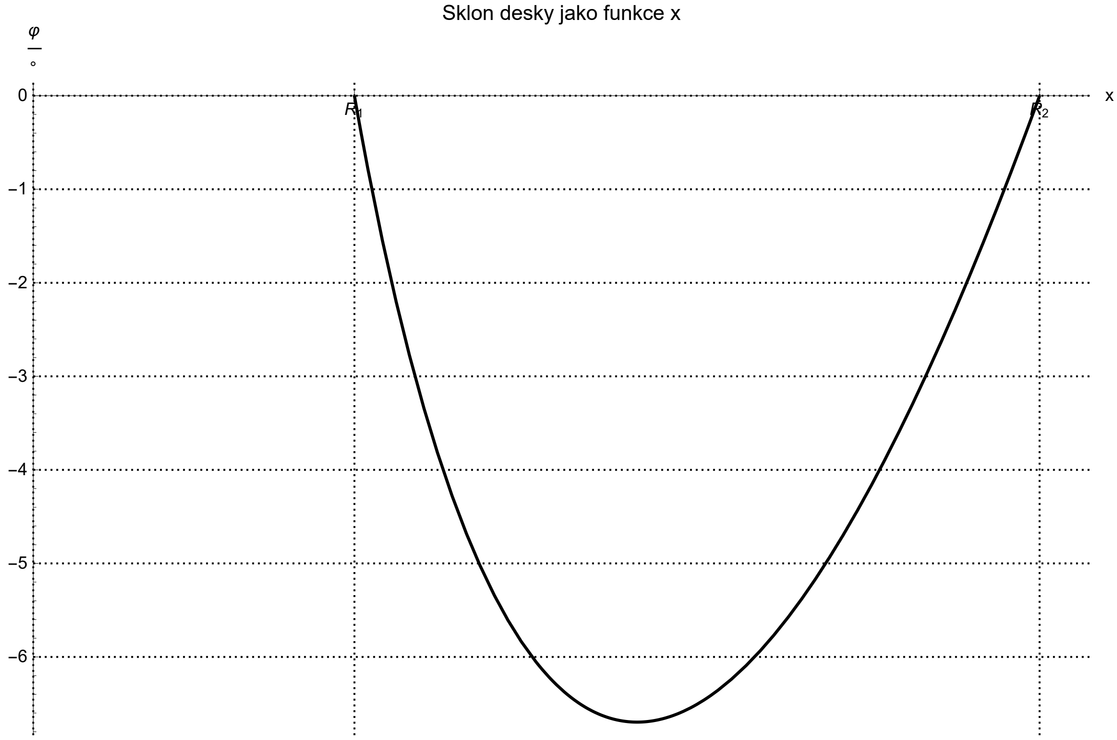
In[15]:=
```
F /. resOP /. cisla
```

Out[15]=
```
9.63905
```

a nakreslíme grafy:

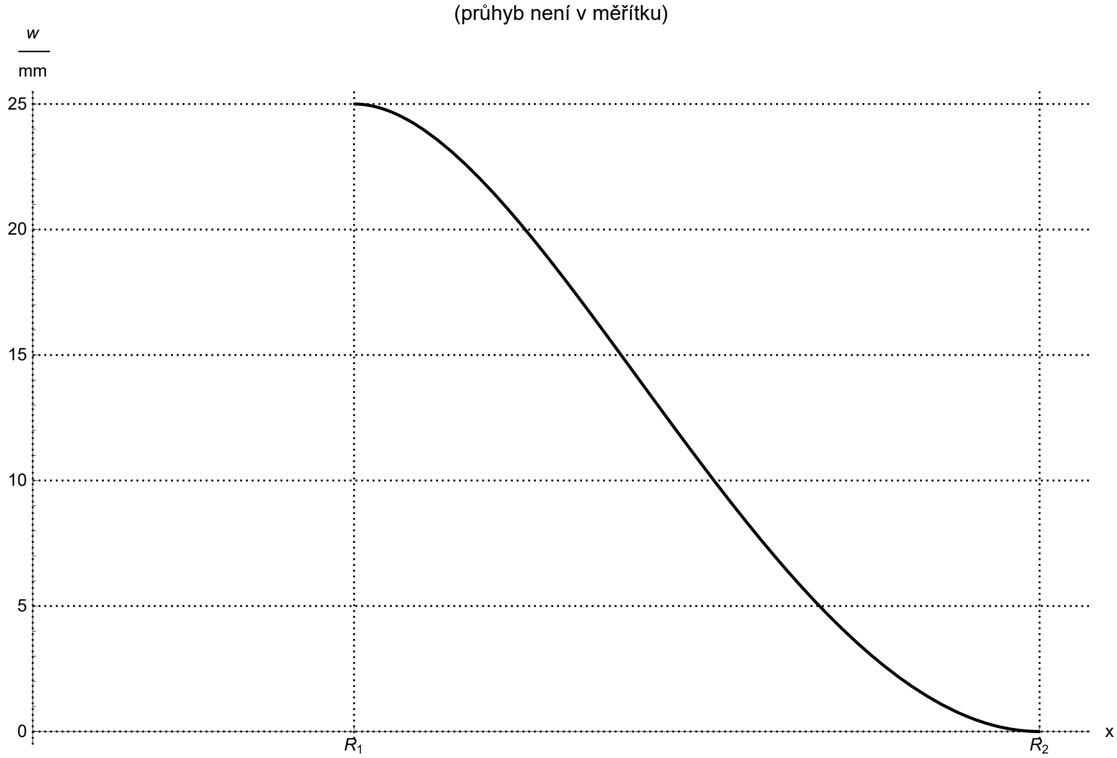
Sklon desky jako funkce x

Out[16]=



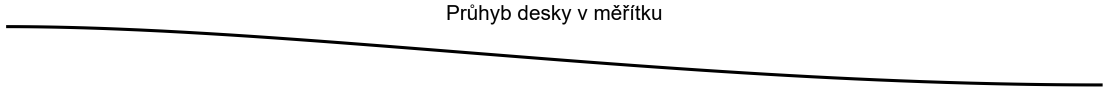
Průhyb desky jako funkce x
(průhyb není v měřítku)

Out[17]=



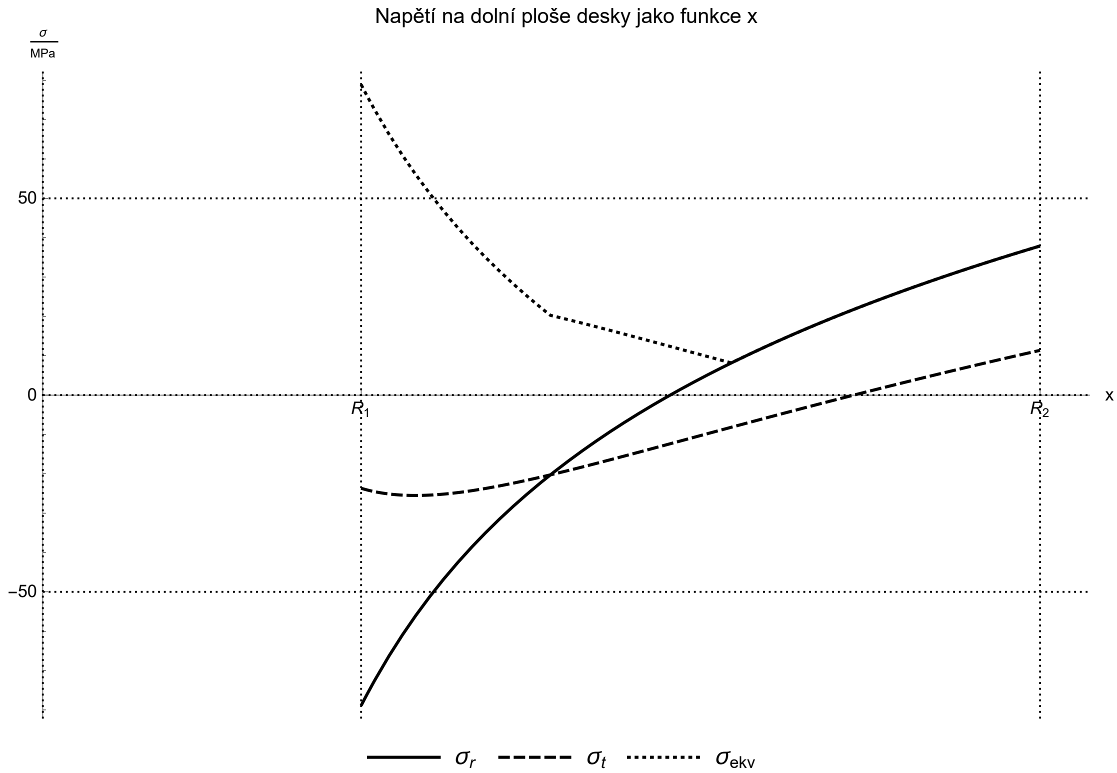
Průhyb desky v měřítku

Out[18]=



In[19]:=

Out[21]=


Napětí na dolní ploše desky jako funkce x
σ/MPa
50
0
−50
x
R1
R2
σr
σt
σekv