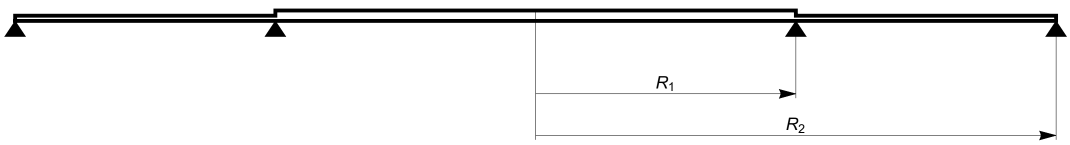
In[1]:= `ClearAll["Global`*"]`

Staticky neurčitá deska

Deska podle obrázku je zatížena pouze vlastní tíhou.
Tloušťky dvou částí desky jsou h_1 a h_2.

Out[2]=



Nejprve si určíme odpovídající qI a qII v čátech desky.
Jednotkou q je $\frac{N}{m^2}$. Musíme tedy určit jaká je tíha jednoho metru čtverečního desky. Dostaneme tak q v obou částech. Všechny hodnoty (včetně qI a qII) jsou shrnuty v následujích pravidlech pro dosazování:

In[3]:=
$$\mathtt{cisla} = \left\{\rho \to 7800,\ R_1 \to 0.55,\ R_2 \to 1,\ h_1 \to 0.002,\ h_2 \to 0.001,\ \mathrm{DI} \to \frac{\mathbb{E}\, h_1{}^3}{12\left(1-\mu^2\right)},\ \mathrm{DII} \to \frac{\mathbb{E}\, h_2{}^3}{12\left(1-\mu^2\right)},\ \mu \to 0.3,\ \mathbb{E} \to 2.1\times 10^{11},\ g \to 10,\ \mathrm{qI} \to \rho\ h_1\, g,\ \mathrm{qII} \to \rho\ h_2\, g\right\};$$

V prvním úseku desky je pravá strana strana rovnice rovna $-\frac{\mathrm{qI}\,\pi r^2}{2\pi r}\frac{1}{\mathrm{DI}} = \frac{h_1 \rho g}{2\,\mathrm{DI}} r$ (ověřte si to). Pro tuto pravou stranu známe partikulární řešení diferenciální rovnice a platí tedy

In[4]:=
$$\varphi\mathrm{I} = C_1\, r + \frac{C_2}{r} - \frac{h_1\, \rho\, g}{16\, \mathrm{DI}} r^3;$$

Ve druhém úseku si nejprve si sestavíme pravou stranu dif. rovnice. Bude obsahovat výslednici qI na plochu o poloměru R_1, sílu (neznámé) reakce na vnitřní podpoře V_1 a výslednici qII na mezikruží mezu R_1 a r. Ověřte si sami, že pravá strana má tvar

In[5]:=
$$\mathrm{psII} = -\frac{\mathrm{qI}\,\pi\, R_1{}^2 - V_1 + \mathrm{qII}\,\pi\left(r^2 - R_1{}^2\right)}{2\,\pi\, r\, \mathrm{DII}};$$

Určíme koeficinety, které jsou u členů r^1 a r^{-1}

In[6]:=
```
A = Coefficient[psII, r, 1]
B = Coefficient[psII, r, -1]
```

Out[6]=
$$-\frac{\mathrm{qII}}{2\,\mathrm{DII}}$$

Out[7]=
$$-\frac{\pi\,\mathrm{qI}\,R_1^2 - \pi\,\mathrm{qII}\,R_1^2 - V_1}{2\,\mathrm{DII}\,\pi}$$

a zapíšeme řešení diferenciální rovnice:

In[8]:=
$$\varphi\mathrm{II} = \frac{A}{8} r^3 + B\left(\frac{r}{2}\mathrm{Log}[r] - \frac{r}{4}\right) + C_3\, r + \frac{C_4}{r};$$

Vztahy pro napětí:

In[9]:=
$$\sigma rI = \frac{\mathbb{E}\, h_1}{2\left(1-\mu^2\right)} \left(D[\varphi I, r] + \mu \frac{\varphi I}{r}\right);$$
$$\sigma rII = \frac{\mathbb{E}\, h_2}{2\left(1-\mu^2\right)} \left(D[\varphi II, r] + \mu \frac{\varphi II}{r}\right);$$

$$\sigma tI = \frac{\mathbb{E}\, h_1}{2\left(1-\mu^2\right)} \left(\frac{\varphi I}{r} + \mu\, D[\varphi I, r]\right);$$
$$\sigma tII = \frac{\mathbb{E}\, h_2}{2\left(1-\mu^2\right)} \left(\frac{\varphi II}{r} + \mu\, D[\varphi II, r]\right);$$

Okrajové podmínky pro φ:

In[13]:=
```
op1 = {C₂ == 0,
    (σrII == 0) /. r → R₂,
    (φI == φII) /. r → R₁,
    (σrI h₁² == σrII h₂²) /. r → R₁
  };
```

průhyby:

In[14]:=
$$wI = \int \varphi I \, dr + C_5;$$
$$wII = \int \varphi II \, dr + C_6;$$

Okrajové podmínky pro průhyby:

In[16]:=
```
op2 = { (wI == 0) /. r → R₁,
    (wII == 0) /. r → R₁,
    (wII == 0) /. r → R₂};
```

Obě sady okrajových podmínek sloučíme dohromady

In[17]:=
```
op = Join[op1, op2];
```

a řešení integračních konstant a síly V_1 uložíme (řešení je dlouhé, proto ho ani nevypisuji)

In[18]:=
```
res = Solve[op, {C₁, C₂, C₃, C₄, C₅, C₆, V₁}][[1]] // Simplify;
```

Definuji si sklon, průhyb a napětí

In[19]:=
$$\varphi = \begin{cases} \varphi I & 0 <= r <= R_1 \\ \varphi II & R_1 < r \le R_2 \end{cases} \ /.\ res;$$

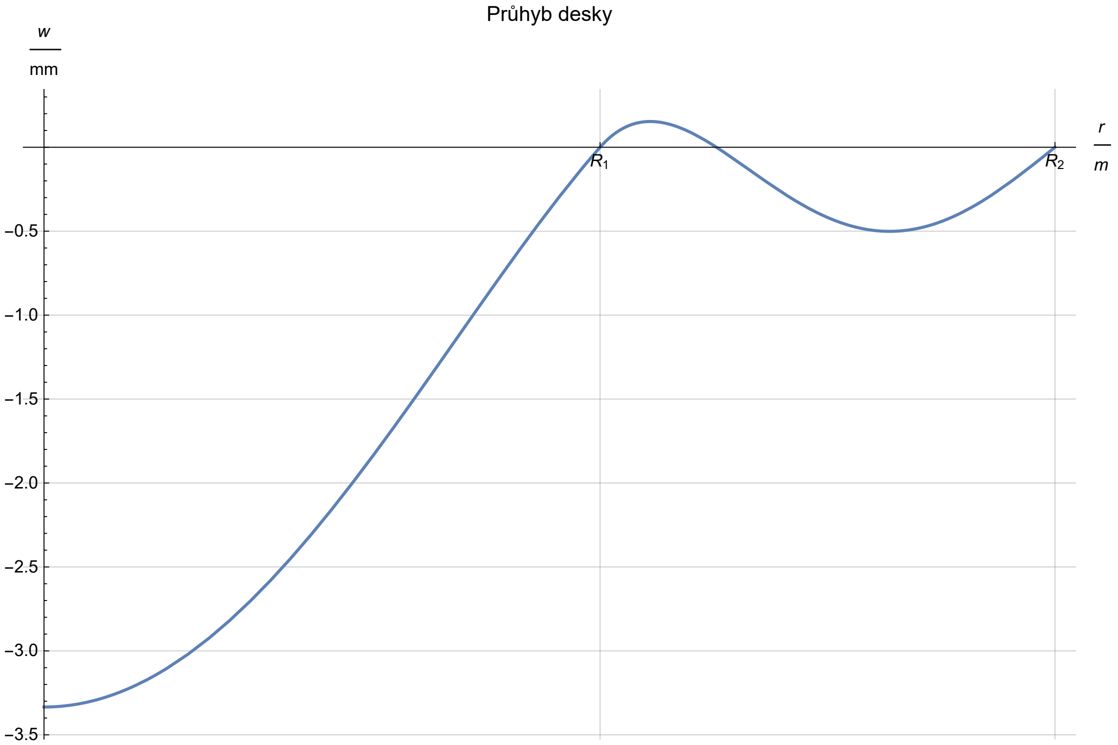
In[20]:=
$$w = \begin{cases} wI & 0 <= r <= R_1 \\ wII & R_1 < r \le R_2 \end{cases} \ /.\ res;$$

In[21]:=
$$\sigma r = \begin{cases} \sigma rI & 0 <= r <= R_1 \\ \sigma rII & R_1 < r \le R_2 \end{cases} \ /.\ res;$$
$$\sigma t = \begin{cases} \sigma tI & 0 <= r <= R_1 \\ \sigma tII & R_1 < r \le R_2 \end{cases} \ /.\ res;$$

Out[23]=

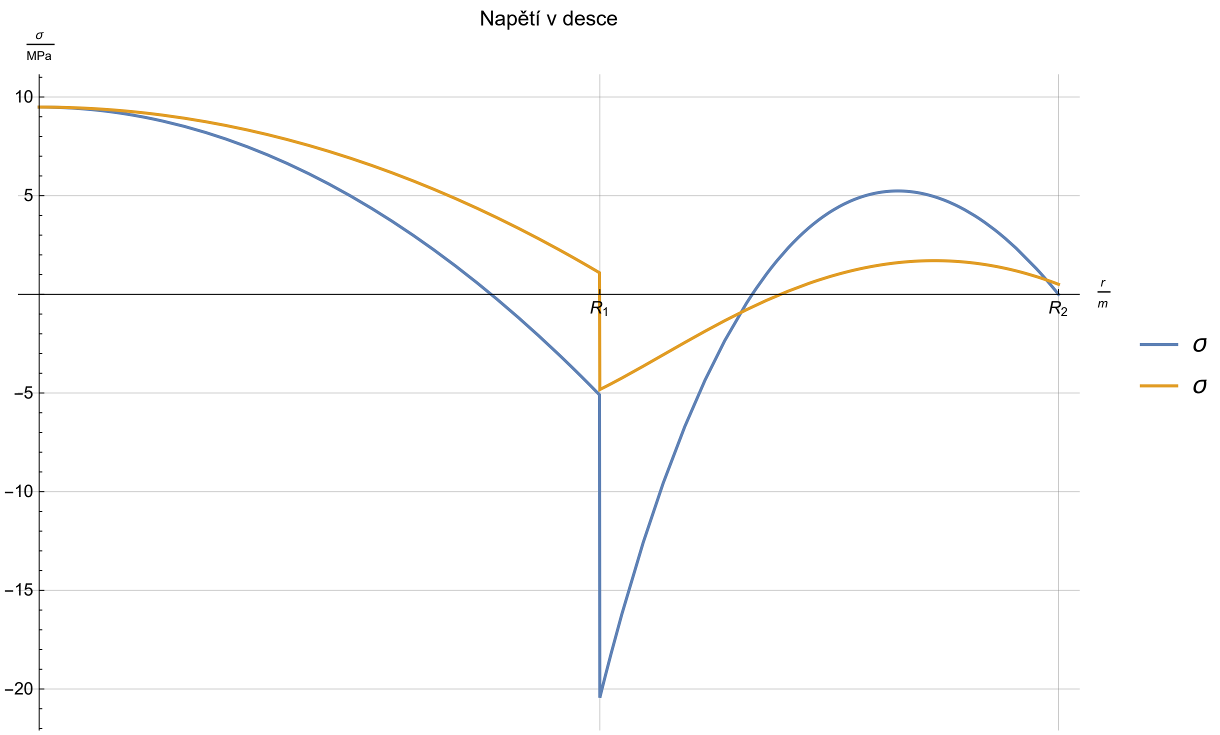
Sklon desky
φ
°
0.4
0.2
−0.2
R1
R2
r
m

Out[24]=



Průhyb desky
w
mm
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.5
−3.0
−3.5
R1
R2
r
m

Out[25]=



Out[26]=