Přednáška 2

Téma: **Výroková logika** v učivu matematiky. Pravdivost výroků. Výrokotvorné spojky, negace, konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence. Výrokové formule, tautologie. Výrokové formy, proměnná, obor proměnné, obor pravdivosti. Existenční a obecný kvantifikátor. Axiomy. Matematické věty a definice. Důkazy matematických vět.

Matematický výrok je každé smysluplné sdělení, o kterém lze rozhodnout, zda je pravdivé, či nepravdivé. Výroky označujeme velkými nebo malými písmeny abecedy $A, B, C, \dots p, q, r, \dots$. Výrok může být pravdivý (označujeme 1), nebo nepravdivý (označujeme 0).

Příklad:	
Svítí sluníčko	1 (pravdivý výrok, v závislosti na skutečném stavu)
$10 - 5 = 3$	0 (nepravdivý výrok)

Negací výroku rozumíme změnu jeho pravdivostní hodnoty na opačnou. Značíme symbolem $\neg$, který píšeme před označení výroku $\neg\, p$. Čteme: „Není pravda, že p…“. (Další možná značení: p', nebo $\bar{p}$).

Složený výrok *(formule)* je vytvořen z jednoduchých výroků pomocí logických spojek, negací a závorek. Výrokové spojky: konjunkce $\wedge$, disjunkce $\vee$, implikace $\Rightarrow$, ekvivalence $\Leftrightarrow$.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Tab. 1 Tabulka pravdivostních hodnot složených výroků

Výroková forma je matematický výraz, který obsahuje proměnou. Na příklad $x > 1$, $x^2 + 2x \leq 0$. Z výrokové formy se stane výrok, pokud za proměnou dosadíme konstantu, nebo když použijeme kvantifikátor.

Příklad:
A) Dosazením konstanty: dosadíme-li do výrokové formy $x > 1$ za proměnnou číslo 2, získáváme výrok $2 > 1$. Což je pravdivý výrok. Pokud do výrokové formy $x > 1$ za x dosadíme například 0, získáváme výrok $0 > 1$. Což je nepravdivý výrok.

- Obor proměnné výrokové formy $V(x)$ je množina O všech prvků, výrokové formy, které přichází v úvahu jako hodnoty proměnné x (obor proměnné volíme)
- Definiční obor výrokové formy $V(x)$ je množina D všech prvků x z výrokové formy množiny O, které po dosazení do výrokové formy $V(x)$ za proměnnou x změní $V(x)$ na výrok.

- Obor pravdivosti výrokové formy $V(x)$ je množina P všech prvků výrokové formy z množiny D, které po dosazení do výrokové formy $V(x)$ za proměnnou x změní výrokovou formu $V(x)$ na výrok pravdivý.

B) Užitím kvantifikátoru: kvantifikátor je slovo, nebo slovní spojení určující počet (např. právě 3, nejvýše 5, alespoň 10 atp.). V matematice používáme nejčastěji dva kvantifikátory: **všeobecný** $\forall$ (čteme „Pro všechna…“) a **existenční** $\exists$ (čteme „Existuje…“, „Existuje alespoň jedno…“). Pokud před výrokovou formu předřadíme příslušný kvantifikátor, který se vztahuje k proměnné a dané množině, získáme výrok. Například $\forall x \in \boldsymbol{R};\ x > 1$ („Pro všechna x z množiny reálných čísel platí, že $x > 1$), nebo $\exists x \in \boldsymbol{R};\ x^2 + 2x \leq 0$ („Existuje x z množiny reálných čísel, pro které platí, že $x^2 + 2x \leq 0$).

Výroková formule je matematický výraz, který obsahuje výroky, logické spojky a závorky. Umíme určit jeho pravdivost v závislosti na pravdivosti jednotlivých výroků. K určení pravdivostních hodnot výrokové formule využíváme tabulku. Rozlišuje tři typy výrokových formulí: tautologie (výsledkem výrokové formule jsou jen jedničky); kontradikce (výsledkem výrokové formule jsou jen nuly); splnitelná (ve výsledku výrokové formule jsou jen nuly i jedničky).

Příklad:
Určete pravdivostní hodnoty formule: $(p \wedge q) \Rightarrow \neg(p \vee q)$

p	q	$(p \wedge q)$	$\Rightarrow$	$\neg(p \vee q)$	$(p \vee q)$
1	1	1	**0**	0	1
1	0	0	**1**	0	1
0	1	0	**1**	0	1
0	0	0	**1**	1	0
pořadí		1	*výsledek*	3	2

jde o splnitelnou formuli.

Negace výroků s kvantifikátory: obecně negujeme výroky s kvantifikátory tak, že změníme příslušný kvantifikátor (obecný na existenční a na opak) a negujeme vlastnost. Tedy negací výroku $\forall x \in M; p(x)$ je výrok $\exists x \in M; \neg p(x)$, a negací výroku $\exists x \in M; q(x)$ je výrok $\forall x \in M; \neg q(x)$.

Příklad:
Výrok:

$$\forall x \in \boldsymbol{N}; x < 5$$

daný výrok je zjevně nepravdivý. Nyní výrok znegujeme

$$\neg(\forall x \in \boldsymbol{N}; x < 5) \equiv \exists x \in \boldsymbol{N}; \neg(x < 5),$$

neboli po znegování vlastnosti $<$ získáme

$$\exists x \in \boldsymbol{N}; x \geq 5.$$

Pokud výrok obsahuje více kvantifikátorů, postupujeme obdobně. Negací výroku

$$\exists y \in \boldsymbol{N}\ \forall x \in \boldsymbol{N}; x \leq y$$

je výrok

$$\forall y \in \boldsymbol{N}\ \exists x \in \boldsymbol{N}; x > y.$$

Negaci výroků s dalšími kvantifikátory ukazuje následující příklad:

Výrok	Negace výroku
Nejvýše n prvků … je …	Alespoň $(n+1)$ prvků… je…
Alespoň jeden prvek … je …	Každý prvek… není…
Alespoň n prvků … je …	Nejvýše $(n-1)$ prvků … je …

Axiom: (*z řec. axióma, to co se uznává*) je tvrzení, které se předem pokládá za platné, a tudíž se nedokazuje. Všechny ostatní poznatky se vyvozují.

Vlastnosti systému axiomů:

- *bezespornost: systém neumožňuje odvodit dvě protikladná tvrzení;*
- *úplnost: všechny věty a teorémy se dají z axiomů a dříve dokázaných tvrzení odvodit čistě logickou cestou;*
- *nezávislost: žádný axióm se nedá odvodit z ostatních axiomů.*

Definice (matematická): pomocí definice zavádíme nový pojem, stanovujeme jeho název a vymezujeme podstatné (charakteristické) vlastnosti pojmu pomocí dříve definovaných nebo základních pojmů.

- **obsah pojmu** je souhrn všech vlastností charakteristických pro daný pojem, jde o množinu všech vlastností pojmu, z nichž každý je nevyhnutelný, a všechny společně jsou postačující k vymezení pojmu
- **rozsah pojmu** je množina všech objektů, které mají vlastnosti stanovené obsahem pojmu

Matematická věta je netriviální a dostatečně obecné tvrzení neboli výrok obvykle ve tvaru implikace (předpoklad ⇒ závěr). Aby se však takové tvrzení dalo považovat za větu, je třeba podat jeho důkaz, to znamená logickým postupem ho odvodit z definic, axiomů a z již dříve dokázaných vět.

Obměněná a obrácená implikace (věta). Máme dánu implikaci $p \Rightarrow q$ vytvořenou z výroků p a q, pak:

- **obměněná implikace** (věta) je $\neg q \Rightarrow \neg p$ (Původní věta a věta k ní obměněná mají stejné pravdivostní hodnoty, jsou logicky ekvivalentní. Pokud je pravdivá původní věta, je pravdivá i její obměna)
- **obrácená implikace** (věta) je $q \Rightarrow p$ (Původní věta a věta k ní obrácená nemají obecně stejné pravdivostní hodnoty. Nejsou vždy logicky ekvivalentní)

Negace implikace (věta). Máme dánu implikaci $p \Rightarrow q$ vytvořenou z výroků p a q, pak její negace je $p \wedge \neg q$.

Příklad:
K pravdivé větě (výroku) $\forall x \in \boldsymbol{N}; x\ je\ sudé \Rightarrow x^2 je\ sudé$ vytvoříme obměněnou a obrácenou větu (implikaci) a její negaci:

- **Obměněná věta** (pravdivá vždy):
$$\forall x \in \boldsymbol{N};\ x^2 není\ sudé \Rightarrow x\ není\ sudé$$
- **Obrácená věta** (nemusí být pravdivá, v tomto výjimečném případě je pravdivá):
$$\forall x \in \boldsymbol{N};\ x^2 je\ sudé \Rightarrow x\ je\ sudé$$
- **Negovaná věta** (nepravdivá):
$$\exists x \in \boldsymbol{N}; x\ je\ sudé \wedge x^2\ není\ sudé$$

Matematický důkaz je logický proces, který používáme při dokazování pravdivosti (platnosti) daného tvrzení. Dokázané tvrzení nazýváme matematická věta. Známe několik typů důkazů:

- **přímý důkaz** je postup, při kterém je dokazované tvrzení odvozeno přímou posloupností jednotlivých implikací jednoduše ověřitelných, spočívá v ověření jedné nebo několika implikací, které na sebe navazují.
- **nepřímý důkaz** se v matematice používá k dokázání matematických vět tvaru implikace. Spočívá v tom, že se k původní implikaci vytvoří její obměna a tu dokazujeme (zpravidla přímým důkazem). Vycházíme z toho, že implikace a její obměna jsou logicky ekvivalentní.
- **důkaz sporem** (*lat. reductio ad absurdum*) se zakládá na použití chybného předpokladu, který je posléze doveden ke sporu (je z něj odvozeno zjevně nepravdivé tvrzení). Pokud máme dokázat, že platí výrok p, postupujeme tak, že výrok p znegujeme a pomocí negovaného výroku dojdeme ke sporu. Tím zjistíme, že negace původního výroku p je nepravdivá, tedy výrok p musí být pravdivý.
- **důkaz matematickou indukcí** je metoda dokazování matematických vět a tvrzení, která se používá, pokud chceme ukázat, že dané tvrzení platí pro všechna přirozená čísla, případně jinou, předem danou nekonečnou posloupnost. Typický důkaz indukcí se skládá ze dvou kroků
  - První krok: V tomto kroku se dokáže, že tvrzení platí pro nejmenší přirozené číslo n (obecně to nemusí být $n = 1$, ale i jiné malé přirozené číslo
  - Indukční krok: dokážeme implikaci „pokud tvrzení platí pro $n = a$, pak platí i pro $n = a + 1$“. Z těchto dvou kroků můžeme odvodit, že daný výraz platí pro všechna n (z nějaké množiny, se kterou zrovna pracujeme).