Základy teorie množin – množina, vztahy mezi množinami, operace s množinami, grafické znázorňování, možnost použití množin na ZŠ

Množina je soubor objektů, chápaný jako celek. Charakterizující vlastnost množiny je, že je jednoznačně určena svými prvky (ale nevšímá si jejich pořadí ani žádné další struktury). Objekty množiny se nazývají **prvky** množiny. Množiny značíme velkými písmeny abecedy a prvky množiny značíme malými písmeny abecedy.

- $a \in A$ čteme a je prvkem množiny A
- $b \notin B$ b čteme b není prvkem množiny B

Slova Georga Cantora:

Množina je souhrn objektů, které jsou přesně určené a rozlišitelné a tvoří součást světa našich představ a myšlenek; tyto objekty nazýváme prvky množiny.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor *(3. března 1845 Petrohrad – 6. ledna 1918 Halle) byl významný německý matematik a logik. Kromě matematiky se především v pozdějším věku intenzivně věnoval teologii, zejména ve vztahu k vlastní práci o nekonečnu. Je znám především tím, že teorii množin rozšířil o nekonečná čísla, označovaná jako ordinální čísla a kardinální čísla.*

Každou **množinu lze** jednoznačně **zadat** dvěma způsoby:

- **Výčtem prvků**: $A = \{1, 2, 3, 4, a, b, c, d\}$ v případě konečné množiny. Nebo $\{1, 2, 3, \dots\}$ v případě nekonečné množiny, kdy je zřejmé, jak budou prvky množiny pokračovat (výčtem prvků chápeme i grafické zadání množiny pomocí obrázku).
- **Charakteristickou vlastností** $V(x)$, kterou mají právě jen prvky zadané množiny $M = \{x \in U; V(x)\}$. Čteme M je množina všech x z množiny U, pro která platí, že mají vlastnost $V(x)$

V některých úvahách předpokládáme, že množiny, se kterými pracujeme, byly vytvořeny z prvků nějaké předem zvolené množiny Z. Tuto množinu nazýváme **základní množina** (univerzální množina).

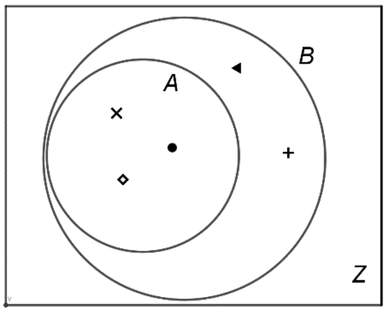
Prázdná množina je množina, která neobsahuje žádné prvky. Značíme symbolem $\emptyset$ nebo $\{\ \}$.

Relace (vztahy) mezi množinami

Jestliže dvě množiny A a B obsahují tytéž prvky, říkáme, že množiny A a B jsou si **rovny** a označujeme $A = B$.

Def. Množina ***A* je podmnožinou množiny *B*** právě tehdy když pro všechny prvky x ze základní množiny Z platí, jestliže x náleží množině A, pak také náleží množině B.

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in Z; x \in A \Rightarrow x \in B$$



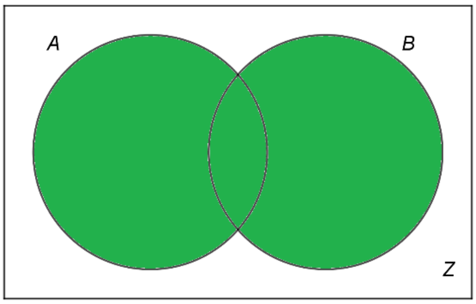
- Množiny se stejným počtem stejných prvků jsou si rovné.
- Prázdná množina je podmnožinou každé množiny.

Množinové operace

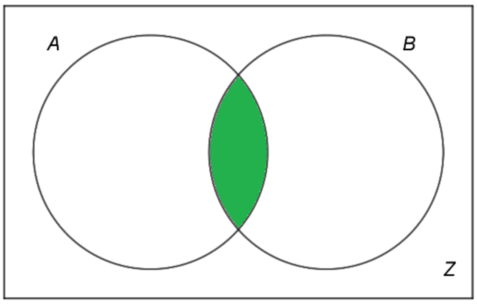
Množinové operace definujeme pomocí množinové symboliky a znázorňujeme na tzv. Vennově diagramu.

Vennův diagram (Vennův graf) je způsob grafického vyjádření příslušnosti prvků do množiny a vztahů mezi množinami. Je tvořený uzavřenými křivkami, přičemž body uvnitř křivky představují prvky dané množiny a body venku prvky, které do množiny nepatří. Vennovy diagramy se používají na zobrazení vztahů mezi množinami a množinových operací. Obdélník ohraničující Vennův diagram zahrnuje všechny možné prvky. Nazývá se základní množina (univerzum).

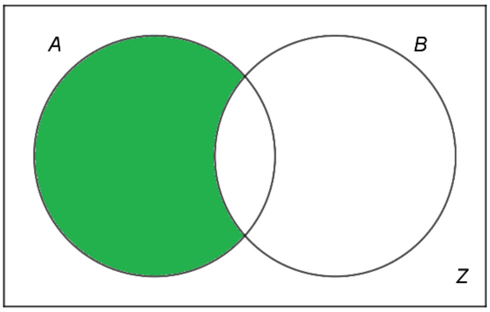
Sjednocení: $A \cup B = \{x \in Z; x \in A \vee x \in B\}$



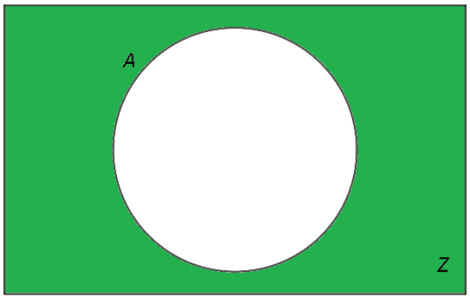
Průnik: $A \cap B = \{x \in Z; x \in A \wedge x \in B\}$



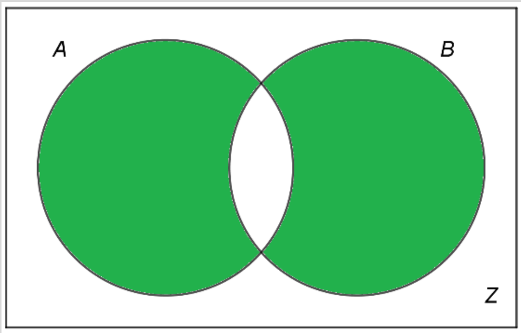
Rozdíl: $A - B = \{x \in Z; x \in A \wedge x \notin B\}$



Doplněk: $A' = \{x \in Z; x \notin A\}$



Symetrický rozdíl: $A \triangle B = \{x \in Z; x \in A \,\overline{\vee}\, x \in B\}$



Kartézský součin dvou množin

Uspořádanou dvojicí prvků nazýváme množinu (x, y), prvek x se nazývá první složka a

Pro libovolné dvě uspořádané dvojice prvků (a, b), (c, d) platí:

- $a \neq b \Rightarrow (a, b) \neq (b, a)$
- $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

Kartézským součinem libovolných dvou množin A, B v tomto pořadí nazýváme množinu $A \times B$ definovanou vztahem $A \times B = \{(x, y); x \in A \wedge y \in B\}$.

Kartézský součin libovolných dvou množin A, B není obecně komutativní operace ($A \times B \neq B \times A$).

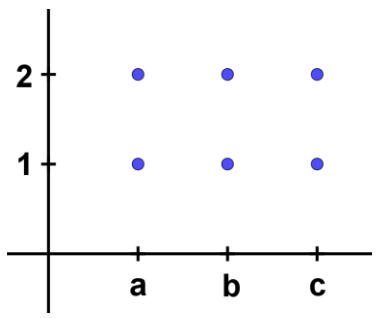
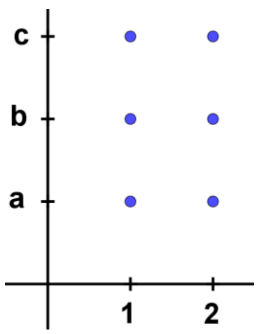
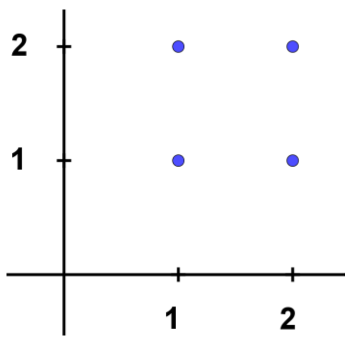
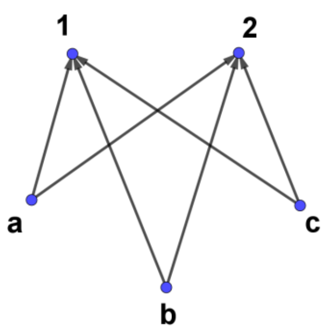
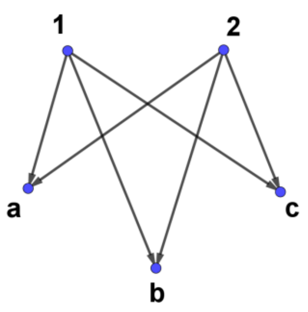
Kartézský součin můžeme graficky znázornit třemi způsoby: kartézským, uzlovým, nebo šachovnicovým grafem (poslední zmíněný je v podstatě jen jinou obdobou kartézského grafu a často se nevyužívá).

Příklad:
Jsou dány množiny $A = \{\ a;\ b;\ c\ \}$ a $B = \{\ 1; 2\}$. Určete $A \times B$, $B \times A$ a $B \times B$ nakreslete jejich grafy.

$$A \times B = \{(a; 1); (a; 2); (b; 1); (b; 2); (c; 1); (c; 2)\}$$

$$B \times A = \{(1; a); (1; b); (1; c); (2; a); (2; b); (2; c)\}$$

$$B \times B = \{(1; 1); (1; 2); (2; 1); (2; 2)\}$$

	$A \times B$	$B \times A$	$B \times B$
kartézský			
uzlový			

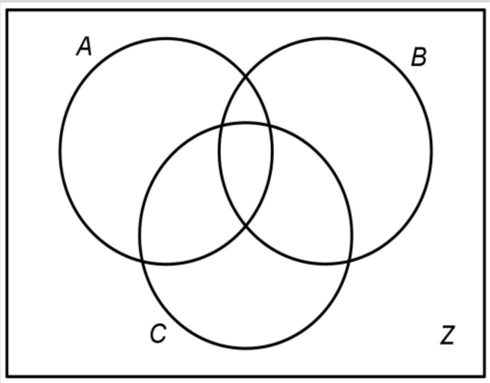
Potenční množina *množiny X (značíme $P(X)$) je taková množina, která obsahuje všechny podmnožiny množiny X.*

Příklad: Utvořte potenční množinu $P(A)$ množiny $A = \{1; 2; 3\}$.

$$P(A) = \{\emptyset;\ \{1\}; \{2\};\ \{3\};\ \{1;2\};\ \{1;3\};\ \{2;3\};\ \{1;2;3\}\}$$

Pokud je množina X konečná a obsahuje n prvků, pak ***počet prvků potenční množiny*** *$P(X)$ je roven 2^n.*

Vennův diagram pro 3 množiny



Vennův diagram pro 4 množiny