Binární relace – relace a její grafické znázornění, vlastnosti re-lací, relace ekvivalence, rozklad množiny, relace uspořádání, užití relace ekvivalence a uspořádání na ZŠ

Binární relace je pojem z matematiky a vyjadřuje **vztah** (relaci) prvků jedné množiny k prvkům v druhé množině. **Binární relace** R je množina uspořádaných dvojic. Jsou-li X a Y množiny, nazývá se libovolná podmnožina kartézského součinu $X \times Y$ relací mezi X a Y. Často se zabýváme relací mezi prvky téže množiny. Pak mluvíme o **relaci na množině** X, tedy libovolné podmnožině $R \subset X \times X$. To, že je prvek x v relaci s prvkem y zapisujeme $(x; y) \in R$, nebo zkráceně xRy. Relace obvykle značíme velkými písmeny $R, S, T, \dots$.

*Def.(**Binární relace**): Množina R se nazývá binární relace právě tehdy když:*

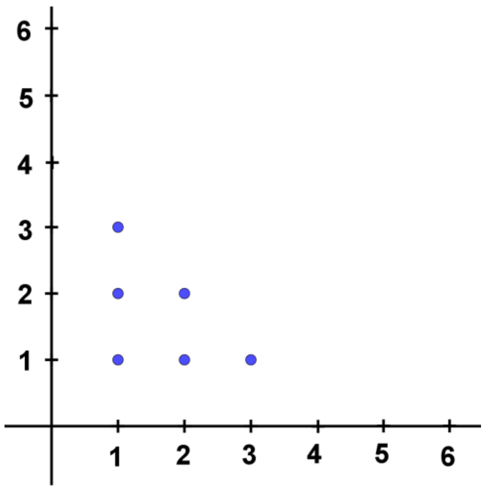
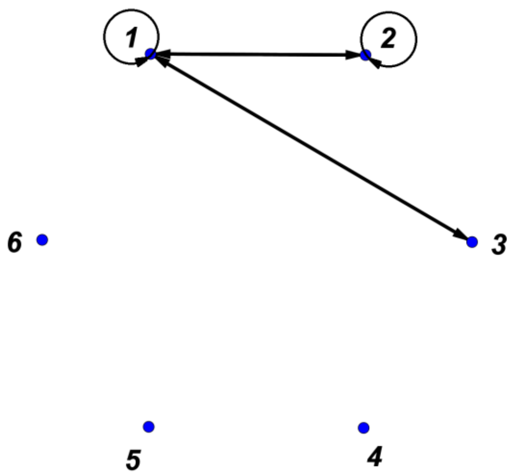
$$(\forall x); (x \in R \Rightarrow \exists y \exists u \; x = (y; u))$$

*Def. Pro libovolnou relaci R v množině M nazveme množinu $O_1(R) = \{x; \exists y; xRy\}$ **první obor** relace R a množinu $O_2(R) = \{y; \exists x; xRy\}$ **druhý obor** relace R.*

Binární relace můžeme **graficky znázornit** na různých typech grafů (např. kartézský, uzlový).

Příklad:
V množině $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ je dána relace $R = \{(x; y) \in M \times \mathrm{M}; \mathrm{x} + \mathrm{y} < 5\}$. Zapište relaci R výčtem prvků a nakreslete kartézský a uzlový graf relace R.

$$R = \{(1; 1); (1; 2); (1; 3); (2; 1); (2; 2); (3; 1)\}$$

	kartézský	uzlový
R		

*Def.(**Doplňková relace**):* Všechny dvojice $(x, y) \in M \times M$, které nepatří do relace R, tvoří doplňkovou relaci k relaci R. Značíme ji R'.

- v kartézském grafu jsou to zbývající průsečíky, které nejsou vyznačeny
- v uzlovém grafu všechny chybějící šipky, vč. chybějících smyček

*Def.(**Inverzní relace**): Nechť R je relace, pak inverzní relaci R^{-1} k relaci R dostaneme tak, že zaměníme pořadí složek ve všech uspořádaných dvojicích tvořících relaci R.*

Def. **(Vlastnosti relací)** Nechť R je relace v množině M. Řekneme, že relace R je v množině M:

a) **reflexivní** právě tehdy když $\forall x \in M; xRx$

b) **antireflexivní** právě tehdy když $\forall x \in M; \neg(xRx)$

c) **symetrická** právě tehdy když $\forall x, y \in M; xRy \Rightarrow yRx$

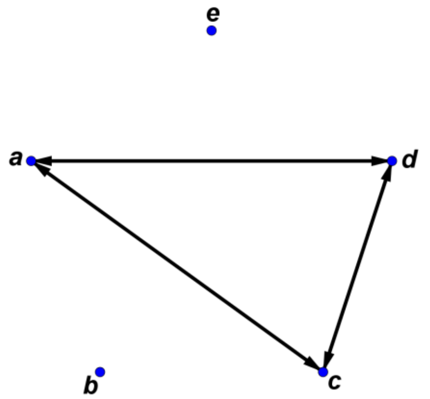
d) **antisymetrická** právě tehdy když $\forall x, y \in M; xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$

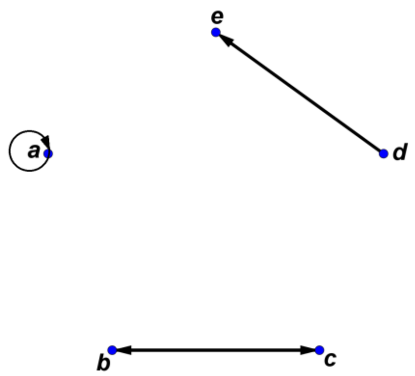
e) **tranzitivní** právě tehdy když $\forall x, y, z \in M; xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

f) **trichotomická** právě tehdy když $\forall x, y \in M; xRy \vee yRx \vee x = y$

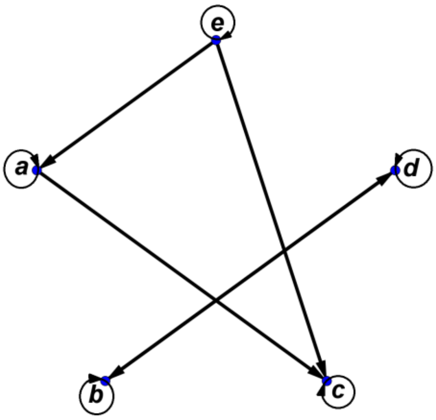
g) **souvislá** právě tehdy když $\forall x, y \in M; \neg(xRy) \wedge \neg(yRx) \Rightarrow x = y$

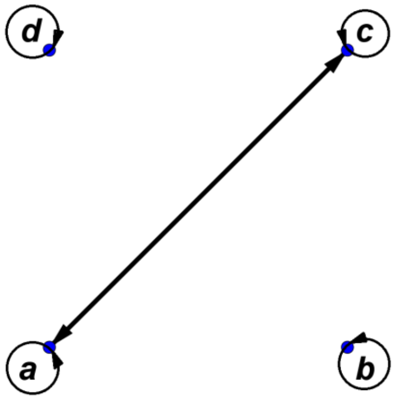
Příklad:
Jsou dány množina $M = \{a, b, c, d, e\}$ a $K = \{a, b, c, d\}$. Určete vlastnosti relací R_1, R_2 a R_3 v množině M a R_4 v množině K, které jsou zadány uzlovými grafy.

<table>
<tr><th>R_1</th><th>R_2</th></tr>
<tr><td>


- reflexivní: NE
- antireflexivní: ANO
- symetrická: ANO
- antisymetrická: NE
- tranzitivní: NE (chybí smyčky u a, c, d)
- trichotomická: NE
- souvislá: NE
</td><td>


- reflexivní: NE
- antireflexivní: NE
- symetrická: NE
- antisymetrická: NE
- tranzitivní: NE
- trichotomická: NE
- souvislá: NE
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>R_3</th><th>R_4</th></tr>
<tr><td>


- reflexivní: ANO
- antireflexivní: NE
- symetrická: NE
- antisymetrická: NE
- tranzitivní: ANO
- trichotomická: NE
- souvislá: NE
</td><td>


- reflexivní: ANO
- antireflexivní: NE
- symetrická: ANO
- antisymetrická: NE
- tranzitivní: ANO
- trichotomická: NE
- souvislá: NE
</td></tr>
</table>