Binární operace – operace a její vyjádření tabulkou, vlastnosti operací, definovanost, asociativnost, komutativnost, sčítání a odčítání na ZŠ, pamětné, písemné, algoritmus

Def. (**Binární operace**) **Binární operací** $\circ$ v libovolné neprázdné množině A rozumíme každé zobrazení $\circ$ z množiny $A \times A$ do množiny A. Jestliže v binární operaci $\circ$ přísluší uspořádané dvojici $(x; y) \in A \times A$ tedy vzoru jako obraz prvek $z \in A$, píšeme:

$$x \circ y = z.$$

Prvek z je výsledkem operace $\circ$ s prvky x, y v tomto pořadí.

Binární operace označujeme různými symboly: $\circ, *, \triangle, \oplus, \odot, \cup, \cap \dots$, ale také $+, -, \cdot, :$ atp. Operace na konečných množinách lze také zadávat tzv. **operační tabulkou**. V záhlaví tabulky (v řádku a sloupci) zapisujeme prvky množiny a do tabulky pak výsledky dané operace pro příslušné prvky.

Příklad:
Na množině $A = \{a, b, c\}$ je operační tabulkou dána operace $\circ$ takto:

$\circ$	a	b	c
a	a	c	b
b	a	b	c
c	c	b	c

Základní vlastnosti binárních operací

Def. (**Neomezeně definované binární operace**) Binární operaci $\circ$, která je definována pro každou uspořádanou dvojici $(x; y) \in A \times A$, nazýváme operací neomezeně definovanou na množině A. Symbolicky:

$$\forall x; y \in A \ \exists z \in A; \ x \circ y = z.$$

Def. (**Komutativní operace**) Binární operaci $\circ$ definovanou na množině A nazýváme **komutativní** právě tehdy, když platí:

$$\forall x; y \in A \ ; \ x \circ y = y \circ x.$$

Def. (**Asociativní operace**) Binární operaci $\circ$ definovanou na množině A nazýváme **asociativní** právě tehdy, když platí:

$$\forall x; y; z \in A \ ; (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z).$$

Def. (**Distributivita**) Mějme na množině A definovány dvě binární operace $\circ$ a $*$. Operace $*$ je distributivní vzhledem k operaci $\circ$ právě tehdy, když platí:

$$\forall x; y; z \in A \ ; (x \circ y) * z = (x * z) \circ (y * z) \land z * (x \circ y) = (z * x) \circ (z * y).$$

První rovnost nazýváme distributivitou zprava a druhou distributivitou zleva.

Def. (**Neutrální prvek**) Na množině A je definována binární operace $\circ$. Prvek $e \in A$ se nazývá neutrální prvek množiny A vzhledem k operaci $\circ$ právě tehdy, když platí:

$$\forall x \in A\,;\; x \circ e = e \circ x = x.$$

Def. (**Inverzní prvky**) Na množině A je definována binární operace $\circ$ a $e \in A$ je neutrální prvek množiny A vzhledem k operaci $\circ$. Pak říkáme, že prvek $\bar{x} \in A$ je inverzní k prvku $x \in A$, jestliže platí:

$$x \circ \bar{x} = \bar{x} \circ x = e.$$

Příklad:

Speciální případy neutrálního a inverzních prvků můžeme nalézt u operací sčítání a násobení v různých číselných množinách.

- Přirozená čísla $\boldsymbol{N}$:
  - sčítání: neutrální prvek je 0, inverzní prvky neexistují, protože množina $\boldsymbol{N}$ neobsahuje záporná čísla
  - násobení: neutrální prvek je 1, inverzní neexistují, protože množina $\boldsymbol{N}$ neobsahuje zlomky
- Celá čísla $\boldsymbol{Z}$
  - sčítání: neutrální prvek je 0, inverzní prvky existují, jsou to opačná čísla
  - násobení: neutrální prvek je 1, inverzní neexistují, protože množina $\boldsymbol{Z}$ neobsahuje zlomky
- Racionální čísla $\boldsymbol{Q}$
  - sčítání: neutrální prvek je 0, inverzní prvky existují, jsou to opačná čísla
  - násobení: neutrální prvek je 1, inverzní existují, jsou to převrácené hodnoty čísel

Věta. V množině A existuje nejvýše jeden neutrální prvek $e \in A$ vzhledem k operaci $\circ$.

Důkaz: Nechť $e_1 \in A$ a $e_2 \in A$ jsou jednotkové prvky v množině A vzhledem k operaci $\circ$, pak podle definice neutrálního prvku platí:

$$e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2$$

Věta. V množině A ke každému $a \in A$ existuje nejvýše jeden inverzní prvek $\bar{a} \in A$ vzhledem k operaci $\circ$.

Důkaz: Nechť $\bar{a}_1 \in A$ a $\bar{a}_2 \in A$ jsou inverzní prvky k prvku $a \in A$ v množině A vzhledem k asociativní operaci $\circ$, pak platí:

$$\bar{a}_1 = e \circ \bar{a}_1 = (\bar{a}_2 \circ a) \circ \bar{a}_1 = \bar{a}_2 \circ (a \circ \bar{a}_1) = \bar{a}_2 \circ e = \bar{a}_2$$