Přirozená čísla N – kardinální číslo, ordinální číslo, Peanova množina, vlastnosti přirozených čísel, vytváření pojmu přirozené číslo, numerace na ZŠ

Přirozená čísla jsou nejdůležitější abstrakcí, kterou lidstvo vynalezlo. Udávají počet nějakých objektů (například číslo 5 udává, že jsme našli 5 jahod, číslo 365 udává počet dní v roce 2019, číslo 3600 počet sekund v jedné hodině, číslo 7 udává počet dní v týdnu, číslo 7 také udává počet barev spektra (červená, oranžová, žlutá, zelená, tyrkysová, modrá, fialová).

Množinu přirozených čísel můžeme zkonstruovat pomocí kardinálních a ordinálních čísel nebo ji vybudovat axiomaticky.

Ordinální čísla

Další informací, kterou nám přirozená čísla poskytují, je uspořádání několika objektů. Tak například neděle je sedmý den ze sedmi dní v týdnu, středa je den třetí atd. Podobně zelená je čtvrtou barvou světelného spektra, modrá šestou. Takovou informaci ale nevyčteme z množiny 7 nakoupených jablek, o jejich pořadí nemá smysl mluvit. Množině dnů v týdnu, spektrálních barev a také množině přirozených čísel $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ s přirozeným uspořádáním přiřazujeme ordinál (ordinální číslo) 7. Pro vyjádření ordinálních čísel konečných množin používáme řadové číslovky.

Def. (**Lineární ostré uspořádání**) Relace R ($\prec$) na množině M se nazývá **lineární ostré uspořádání**, jestliže je antireflexivní, antisymetrická, tranzitivní a souvislá.

Def. (**Dobře uspořádána množina**) Uspořádání $\prec$ na množině M se nazývá **dobré**, právě tehdy když každá neprázdná podmnožina M má první prvek.

Příklady uspořádaných množin:

- $\{\overrightarrow{0, 1}, 2, 3, \dots\}$ je **dobré** uspořádání
- $\{\overrightarrow{2, 3}, 4, \dots, 0, 1\}$ je **dobré** uspořádání
- $\{\overrightarrow{0, 3}, 6, 9\ \dots, 1, 4, 7, \dots, 2, 5, 8, 11, \dots\}$ je **dobré** uspořádání
- $\{\overrightarrow{\dots,} 4, 3, 2, 1, 0\}$ **není dobré** uspořádání
- $\{\overrightarrow{1, 3}, 5, 7, \dots, 6, 4, 2, 0\}$ **není dobré** uspořádání

Mezi dvěma uspořádanými množinami $\vec{X}$ a $\vec{Y}$ definujme relaci $\approx$ (je podobná) takto, $\vec{X} \approx \vec{Y}$ právě tehdy když existuje prosté zobrazení $f: \vec{X} \xrightarrow{na} \vec{Y}$, které zachovává uspořádání.

$$\vec{X} \approx \vec{Y} \Leftrightarrow (\exists f)\ f: \vec{X} \xrightarrow{na} \vec{Y}\ \wedge (\forall x, y \in X)\ x \prec y \Rightarrow f(x) \prec f(y)$$

Relace $\approx$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Jde tedy o relaci typu **ekvivalence**. Ta způsobí rozklad vybrané množiny uspořádaných množin (nemůžeme říkat množiny všech uspořádaných množin, protože to způsobuje rozpory) na bloky navzájem ekvivalentních uspořádaných množin, tj. množin, které mají stejný počet prvků. Uvažujeme-li nejprve konečné množiny, pak každému takovému bloku přiřadíme **ordinální číslo** (ordinál). Konkrétně uspořádaná množina $\left\{\overrightarrow{0,1},2,3,4,5\right\}$ bude mít ordinální číslo (ordinál) 5. Ordinální čísla značíme $ord[X]$, nebo $ord\left\{\overrightarrow{0,1},2,3,4,5\right\} = 5$, nebo řeckými písmeny $\alpha, \beta, \gamma, \dots$.

*Prvním **nekonečným** ordinálem je množina přirozených čísel **N**, která se v této situaci značí ω, případně ω_0. Aby toho nebylo málo, můžeme v konstrukci ordinálů pokračovat: označme $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\} = \{0,1,2,3,\dots,\omega\}$ a máme opět ordinál (obsahuje jako prvky všechna přirozená čísla a navrch ještě jeden prvek, samotnou množinu přirozených čísel). Stejným způsobem můžeme pokračovat v konstrukci dalších nekonečných ordinálů:*

$$\omega + 2, \omega + 3, \dots, \omega + \omega, \omega + \omega + 1, \dots, \omega + \omega + \omega, \dots$$

Přirozená čísla jsou ordinální čísla dobře uspořádaných konečných množin.

Operace s kardinálními čísly (definice ordinálního součtu a součinu již není zcela triviální)

*Def (**Lexikografické uspořádání**) Předpokládejme, že množina X je dobře uspořádaná množina relací R. Lexikografické uspořádání $\lhd$ množiny všech uspořádaných dvojic z kartézského součinu $X \times \mathrm{X}$ podle relace R definujeme vztahem:*

$$(x;y) \lhd (u;v) \Leftrightarrow x \lhd u \vee (x = u \wedge (y \lhd v))$$

*Def (**Součet a součin ordinálních čísel**) Jsou-li α a β dvě ordinální čísla, pak:*

- *jako **součet** $\alpha + \beta$ označíme ordinální číslo, které je typem množiny $(\{\emptyset\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta)$ v lexikografickém uspořádání.*

  $$\vec{X} \cap \vec{Y} = \emptyset \Rightarrow \left|\vec{X}\right| + \left|\vec{Y}\right| = \left|\overrightarrow{X \cup Y}\right|$$

  přičemž pro uspořádání sjednocené množiny platí:

  $$x \underbrace{\lhd}_{X \cup Y} y \Leftrightarrow x \underbrace{\lhd}_{X} y \vee x \underbrace{\lhd}_{Y} y \vee (x \in X \wedge y \in Y)$$

- *jako **součin** $\alpha \cdot \beta$ označíme ordinální číslo, které je typem množiny $\alpha \times \beta$ v lexikografickém uspořádání.*

  $$\vec{X} \cap \vec{Y} = \emptyset \Rightarrow \left|\vec{X}\right| \cdot \left|\vec{X}\right| = \left|\overrightarrow{X \times Y}\right|$$

Jiné definice součtu a součinu ordinálních čísel:

*Def (**Součet ordinálních čísel**) Jestliže pro dvě dobře uspořádané množiny $ord[A] = (A; <)$ a $ord[B] = (B; <)$ platí $A \cap B = \emptyset$, pak je-li $ord[S] = (A\ U\ B; <)$ definujeme součet ordinálních čísel formulí:*

$$ord[A] + ord[B] = ord[S].$$

*Def (**Součin ordinálních čísel**) Jsou-li dány dobře uspořádané množiny $ord[A] = (A; <)$ a $ord[B] = (B;<)$ platí $A \cap B = \emptyset$, pak je-li $ord[V] = (A \times B; <)$, kde uspořádání $<$ je lexikografické, definujeme součin ordinálních čísel formulí:*

$$ord[A] \cdot ord[B] = ord[V].$$