Přirozená čísla N – kardinální číslo, ordinální číslo, Peanova množina, vlastnosti přirozených čísel, vytváření pojmu přirozené číslo, numerace na ZŠ

Přirozená čísla jsou nejdůležitější abstrakcí, kterou lidstvo vynalezlo. Udávají počet nějakých objektů (například číslo 5 udává, že jsme našli 5 jahod, číslo 365 udává počet dní v roce 2019, číslo 3600 počet sekund v jedné hodině, číslo 7 udává počet dní v týdnu, číslo 7 také udává počet barev spektra (červená, oranžová, žlutá, zelená, tyrkysová, modrá, fialová).

Množinu přirozených čísel můžeme zkonstruovat pomocí kardinálních a ordinálních čísel nebo ji vybudovat axiomaticky.

Peanova množina
Jednou ze základních charakteristik množiny všech přirozených čísel je to, že každé přirozené číslo má svého bezprostředního následovníka (pro každé $n \in N$ je to číslo $n + 1$). Existence následovníka využijeme při axiomatickém zavedení množiny přirozených čísel. Nejprve pomocí axiomů definujeme tzv. Peanovu množinu a potom ukážeme, že tato množina je univerzálním modelem množiny všech přirozených čísel. Prvních pět axiomů určuje Peanovu množinu P a další axiomy definují aritmetiku množiny (sčítání a násobení).

(A1) V množině P existuje prvek $e \in P$.
(A2) Ke každému prvku $x \in P$ existuje právě jeden prvek $x' \in P$, který nazýváme následovník prvku x.
(A3) Prvek $e \in P$ není následovníkem žádného prvku množiny P.
(A4) Každé dva různé prvky množiny P mají dva různé následovníky.
(A5) *Axiom úplné indukce*. Jestliže máme množinu $M \subseteq P$ takovou, že $e \in M$ a $\forall x \in P$ platí $x \in M \Rightarrow x' \in M$, pak $M = P$.

Vlastnosti Peanovy množiny vyplívající z prvních pěti axiomů:
- Prvek e je jediný prvek Peanovy množiny P, který není následovníkem žádného jiného prvku Peanovy množiny.
- Každý prvek $x \in P$ takový, že $x \neq e$ má právě jednoho předchůdce. (V Peanově množině máme prvky x, y, pro které platí $y = x'$ (y je následovníkem x). Říkáme, že prvek x je **předchůdcem** prvku y. Zapisujeme $x = {}'y$.)
- Každý prvek Peanovy množiny je různý od svého následovníka.
- Peanova množina je nekonečná množina.

Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že první přirozené číslo je 0 (Uvažujeme tedy, že $e = 0$).

Def. (**Úsek Peanovy množiny**) Nechť $a \in P$, úsekem Peanovy množiny příslušnému k prvku a je množina $U(a)$, kde $U(a) \subset P$, pro kterou platí:
- $a \notin U(a)$,

- jestliže existuje prvek $´a$, pak platí, že $´a \in U(a)$,
- je-li $x \in U(a)$, pak, pokud existuje $´x$, je také $´x \in U(a)$.

Z definice vyplývá, že pro každé $a \in P$ je příslušný úsek $U(a)$ **konečná množina**.

Vlastnosti úseků Peanovy množiny

- Ke každému prvku množiny P existuje právě jeden úsek.
- Žádný úsek Peanovy množiny není ekvivalentní se svojí vlastní podmnožinou.
- Každý úsek Peanovy množiny je určen právě jedním prvkem množiny.

Každému přirozenému číslu můžeme tedy přiřadit právě jeden prvek Peanovy množiny. **Prvky Peanovy množiny nazýváme přirozenými čísly** (Každému úseku Peanovy množiny odpovídá příslušné přirozené číslo.).

Def. (**Konečná množina**) Množina M se nazývá konečná právě tehdy, když je ekvivalentní s některým úsekem Peanovy množiny.

Operace v Peanově množině

Axiomy sčítání:

(A1) $\forall x \in P; x + e = x$,

(A2) $\forall x, y \in P; x + y´ = (x + y)´$

Axiomy násobení:

(A1) $\forall x \in P; x \cdot e = e$,

(A2) $\forall x, y \in P; x + y´ = (x + y)´$

*Def. (**Uspořádání na množině P**) Nechť $a, b \in P$, pak platí: $a < b \Leftrightarrow a \in U(b)$. Relace $<$ z definice je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní, jedná se tedy skutečně o uspořádání na množině P. Pro každé dva různé prvky $a, b \in P$ vždy platí právě jeden ze vztahů $a \in U(b)$, $b \in U(a)$, proto je uspořádání $<$ lineární. Hasseovským diagramem lineárně uspořádané množiny $(P, <)$ je řetězec s nejmenším prvkem e. Dále poznamenejme, že zápis $a < b$ označuje tzv. ostré uspořádání.*

Vlastnosti přirozených čísel

- Množina přirozených čísel je nekonečná a je spočetná.
- Přirozená čísla jsou uzavřená vůči operaci sčítání a násobení. (Pokud sečteme nebo vynásobíme kterákoliv dvě přirozená čísla, získáme opět přirozené číslo.).
- Nejsou uzavřená vůči odečítání, protože pokud odečteme větší číslo od menšího, nezískáme přirozené číslo.
- Podobně nejsou přirozená čísla uzavřená vůči dělení, například $7 : 2 = \frac{7}{2}$ což není přirozené číslo.

Def. (**Rozdíl**) Rozdílem přirozených čísel $a, b \in N$ je takové číslo x, pro které platí $a = b + x$. Číslo x pak zapisujeme $x = a - b$. Operaci, která přirozeným číslům a, b přiřazuje jejich rozdíl, tedy nazýváme odčítáním přirozených čísel.

Def. (**Podíl**) Podílem přirozených čís

..

el $a, b \in N$, kde $b \neq 0$, je takové číslo x, pro které platí $a = b \cdot x$. Číslo x pak zapisujeme $x = a : b$. Operace, která přirozeným číslům a, b, kde $b \neq 0$, přiřazuje jejich podíl, se tedy nazývá dělení přirozených čísel. Def. (**Dělení se zbytkem**) Při dělení přirozených čísel $a, b \in N$ se zbytkem platí $a = b \cdot p + z$. Kde $p, z \in N \wedge z < b$. Pak p je neúplný podíl, z je zbytek.

Vytváření pojmu přirozené číslo

- Je dlouhodobý proces, který probíhá ve všech ročnících 1. st. ZŠ,
- budování pojmu přirozeného čísla souvisí s procesem vysokého stupně abstrakce, dítě musí postupně přestat vnímat viditelné vlastnosti předmětů (např. jejich barvu, velikost, materiál, ze kterého jsou vyrobeny) a musí chápat, že mezi určitými skupinami objektů existuje něco společného, co nesouvisí s viditelnými vlastnostmi těchto objektů,
- dítě dokáže ukázat dva nebo tři konkrétní předměty, ale co je to číslo 2 nebo 3, neví.

Numerací v oboru přirozených čísel rozumíme vybudování pojmu přirozeného čísla a zvládnutí dalších jeho vlastností tak, aby žák uměl:

- počítat předměty v dané skupině nebo souboru,
- vytvořit skupinu s daným počtem prvků,
- psát číslice, zapisovat čísla,
- číst číslice a čísla,
- orientovat se v číselných řadách,
- znázornit čísla na číselné ose,
- porovnávat čísla,
- zaokrouhlovat čísla.

Numerace na ZŠ se provádí v těchto číselných oborech:

- 1. roč.: 0 - 20
- 2. roč.: 0 – 100
- 3. roč.: 0 – 1000
- 4. a 5. roč.: čísla přirozená