ARNP 1 2015 Př. 7

Dělitelnost přirozených čísel

Motivační příklady:

Proveďte písemně bez použití kalkulačky následující dělení:

- $18468:57$
- $413:14$
- $4707:9$
- $5617:329$

Jak je dělitelnost definovaná?

Příklady definice dělitelnosti: Aritmetika (Fraus) str. 37
Blažek, Algebra a teoretická aritmetika

Nechť *a*, *b* jsou **přirozená čísla,** $b \neq 0$. Říkáme, že *a* **dělí** *b* (respektive *a* je dělitel *b*, *b* je násobek *a*, *b* je dělitelné *a*) právě když **existuje přirozené číslo** *k* tak, že $a \cdot k = b$.
Skutečnost, že *a* **dělí** *b* zapisujeme takto: $a|b$ (čteme „a dělí b“). Například: $7/28, 15/45, 3/18$.
Skutečnost, že takové číslo k neexistuje, vyjadřujeme slovy **„***a* **nedělí** *b***“** a zapisujeme ji zápisem $a \nmid b$. Například $3 \nmid 11$, $5 \nmid 23$. Čteme: 3 nedělí 11 (11 není dělitelné 3), 5 nedělí 23 (23 není dělitelné 5) atd.

Prvočíslo, složené číslo

Prvočíslo je přirozené číslo, které je dělitelné právě dvěma různými přirozenými čísly – číslem jedna a sebou samým. (Číslo 1 tedy není prvočíslo).

Přirozená čísla, větší než 1, která nejsou prvočísla, se nazývají čísla složená.

Příklady prvočísel: $2, 3, 5, 7, \ldots, 13, \ldots 47, \ldots$

Příklady složených čísel: $4, 6, 12, \ldots, 63, \ldots$

Jaký je počet prvočísel?

Odpověď:

Euklides – asi 325 př. n. l – 260 př. n. l., většinou v Alexandrii v Egyptě. Hlavní dílo – Základy – užívaná jako učebnice geometrie více než 2000 let.

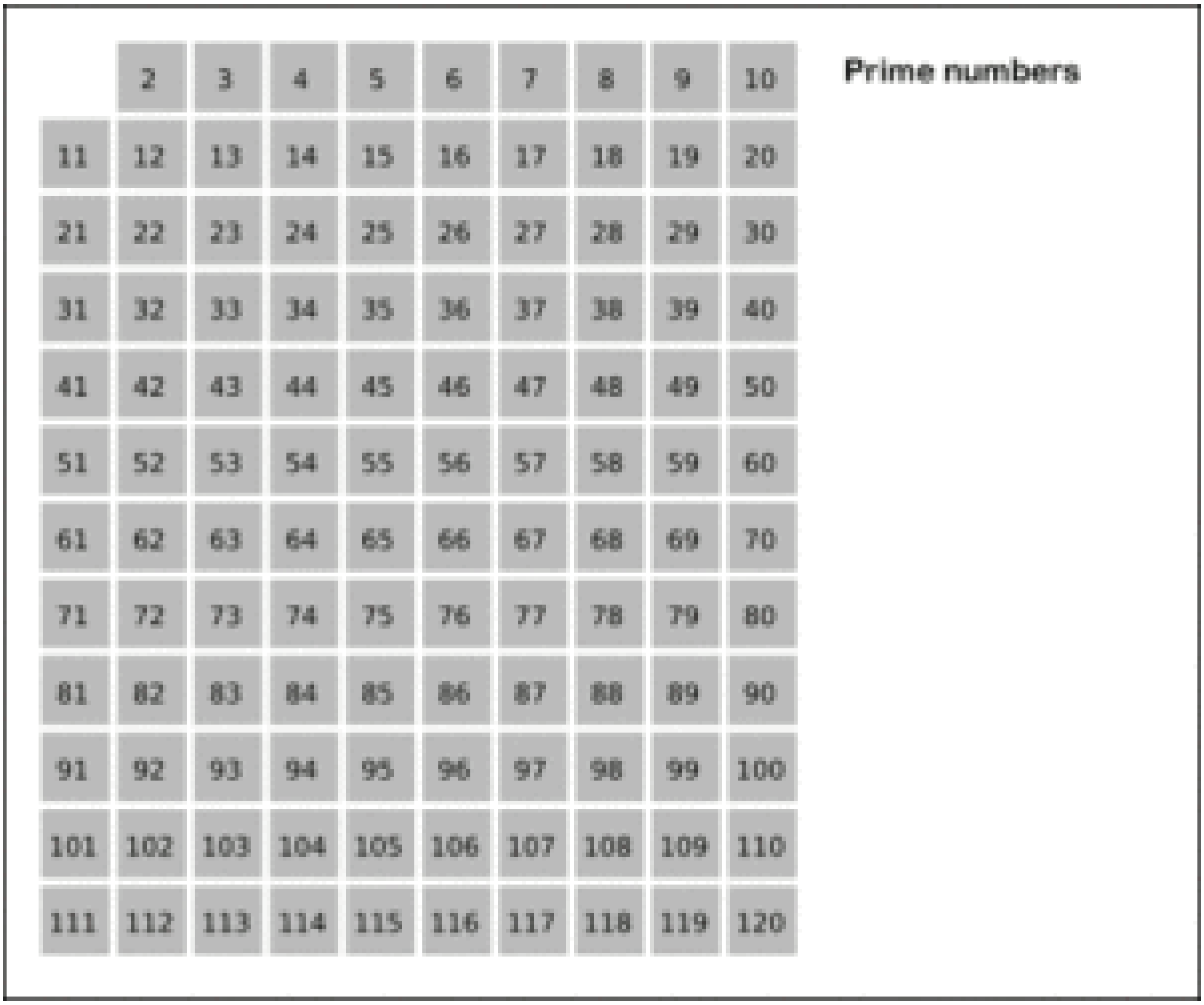
Nástin důkazu:

Předpokládejme, že prvočísel je konečný počet (že jich je n). Pak je možné všechna prvočísla zapsat do seznamu: $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. Vytvoříme nyní nové číslo tak, že všechna čísla v seznamu vynásobíme a k součinu přičteme číslo 1. Vznikne číslo $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Toto číslo není dělitelné žádným z prvočísel v našem seznamu, protože při dělení vždy bude zbytek 1. Pak mohou nastat dvě možnosti: Toto nové číslo je prvočíslem, které je různé od prvočísel v našem seznamu. Pokud toto nové číslo prvočíslem není, pak ale musí být dělitelné nějakým prvočíslem, které není v našem seznamu. V obou případech náš seznam není kompletní, našli jsme prvočíslo, které v něm není. To je ve sporu s tím, že všechna prvočísla se nacházejí v našem seznamu.

Závěr: prvočísel je nekonečně mnoho.

Hledání prvočísel:

Eratosthenovo síto



Mají všechna přirozená čísla dělitele?

3.1 V tabulce v pracovním sešitě obarvěte postupně všechna čísla buď zeleně, nebo modře.

- Obarvěte číslo 2 zelenou barvou a pak všechny jeho násobky v tabulce vždy modře.
- Nejmenším neobarveným číslem je trojka. Vybarvěte ji zeleně a všechny její násobky v tabulce opět modře.
- Čtyřka by následovala dále, ale je již modrá. Najdeme proto další nejmenší nevybarvené číslo – a tím je číslo 5. Opět je vybarvěte zeleně a všechny jeho násobky modře atd.
- Tak pokračujte dále, až budou všechna políčka v tabulce buď modrá, nebo zelená.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Jak poznáme, že určité přirozené číslo n je prvočíslem?

Pro „malá“ prvočísla můžeme zkoumané číslo porovnat s čísly v seznamu prvočísel do 1000.

Prvočísla do 1000:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997.

Jedná-li se o větší číslo nebo nemáme-li po ruce seznam prvočísel, zkoumáme, zda naše číslo má nějaké jiné dělitele než číslo 1 a sebe samo. Má toto zkoumání nějakou hranici?

Má, stačí provádět dělení přirozenými čísly až do hodnoty $\sqrt{n}$.

Pro zajímavost – jaké je v současné době největší známé prvočíslo?

Největší dnes (2013) známé prvočíslo je $2^{57\,885\,161} - 1$, má 17 425 170 dekadických cifer.[1] Je to 48. známé Mersennovo prvočíslo, označované jako $M_{57885161}$. Bylo nalezeno 25. ledna 2013.

Příklady:

Ověřte, zda jsou prvočísly následující přirozená čísla:

109, 129, 251, 269, 619, 889, 929, 979, 991.

Kanonický rozklad

Příklad:

Pokuste se rozložit číslo 2 981 160 na součin prvočísel.
Řešení: 2 981 160 = 2.2.2.3.3.5.7.7.13.13 = $= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^2 \cdot 13^2$

Obecně platí, že **každé přirozené číslo** n **lze zapsat jednoznačně jako součin prvočísel.** Platí tedy:

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$$

Tento zápis nazýváme **kanonický rozklad** přirozeného čísla n. Říkáme, že jsme přirozené číslo n **rozložili na prvočinitele**.

Příklady:

Příklad:

6. Rozložte na prvočinitele přirozená čísla:

   (a) 26 460, (b) 11 088, (c) 61 425.

7. Kterým nejmenším číslem musíme vynásobit číslo (a) 346 500, (b) 187 110,
   a) aby vyšla druhá mocnina přirozeného čísla,
   b) aby vyšla třetí mocnina přirozeného čísla.

Zajímavé rozšíření:
Dokonalé číslo je takové číslo, které je rovno **součtu všech svých dělitelů, kromě sebe samotného.** Ověřte tuto vlastnost pro čísla 6, 28, 498, 8128.

Spřátelená čísla jsou taková dvě přirozená čísla, že **součet všech dělitelů jednoho čísla (kromě toho čísla samotného) se rovná druhému číslu a součet všech dělitelů druhého čísla (kromě něho samotného) se rovná prvnímu číslu.** Ověřte tuto vlastnost pro dvojici čísel 220 a 284.