Základy teorie pravděpodobnosti

Náhodný pokus
Náhodným pokusem (stručněji pokusem) rozumíme každé uskutečnění určitého systému podmínek resp. pravidel.

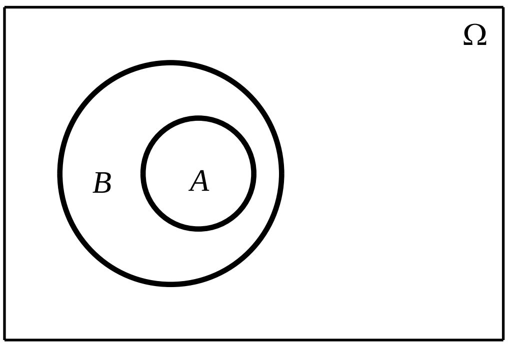
Poznámka:
Výsledek pokusu není předem znám (výsledek není jednoznačně určen jeho podmínkami), je to však právě jeden z prvků známé množiny výsledků, kterou nazýváme základní prostor Ω.

Náhodný jev
Náhodným jevem (stručněji jevem) nazýváme skutečnost, která je výsledkem pokusu.

Prvky základního prostoru (tj. možné výsledky náhodného pokusu) se nazývají **elementární jevy** $(E_1, E_2, E_3, ...)$.
Tedy: každá podmnožina základního prostoru Ω se nazývá **náhodný jev** (značíme $A, B, ...$), přičemž prázdná podmnožina se nazývá **jev nemožný**, označujeme $\varnothing$ a celý základní prostor **jev jistý**, označujeme I (nebo Ω).

Operace s jevy

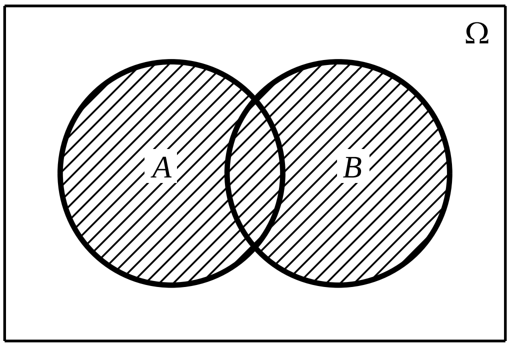
Podjev
Jev A je částí jevu B, jestliže s každým nastoupením jevu A nastane i jev B.
Zavádíme označení $A \subset B$.



Příklad
jev A … padnutí lichého čísla
jev B … padnutí čísla menšího než šest
platí $A \subset B$

Součet jevů A, B

Jev, který nastane právě tehdy, když nastane alespoň jeden z jevů A, B. Zavádíme označení $C = A + B$.

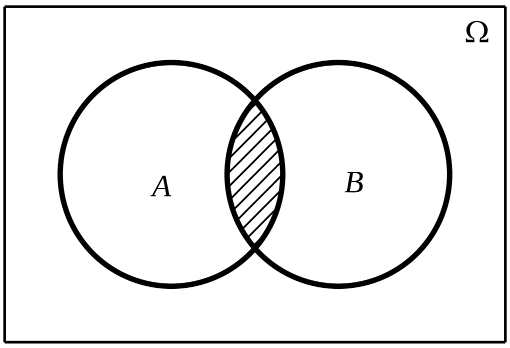


Příklad

jev A … padnutí sudého čísla
jev B … padnutí čísla menšího než pět
jev $A+B$ … padnutí některého z čísel 1,2,3,4,6

Součin jevů A, B

Jev, který nastane právě tehdy, když nastanou oba jevy současně. Zavádíme označení $C = A.B$.

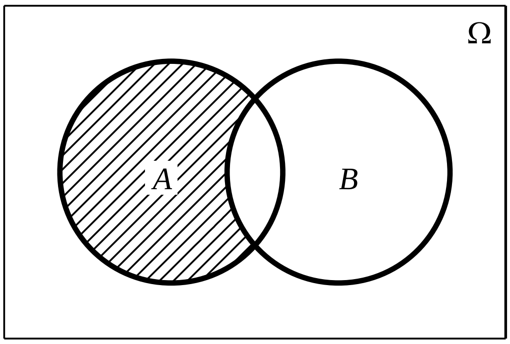


Příklad

jev A … padnutí sudého čísla
jev B … padnutí čísla menšího než pět
jev AB … padnutí některého z čísel 2,4

Rozdíl jevů A, B

Jev, který nastane právě tehdy, když nastane jev A a nenastane jev B. Zavádíme označení $C = A - B$.

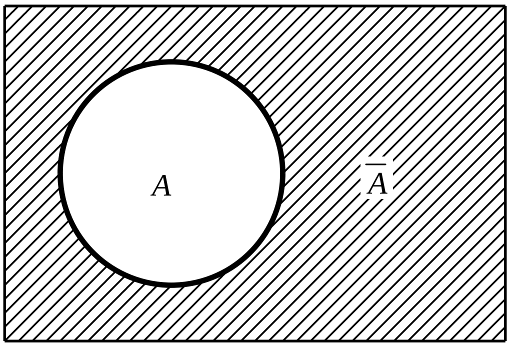


Příklad

jev A … padnutí sudého čísla
jev B … padnutí čísla menšího než pět
jev $A - B$ … padnutí čísla 6

Jev opačný

Jevem opačným k jevu A nazýváme jev $\overline{A} = \Omega - A$.



Příklad

jev A … padnutí sudého čísla
jev $\overline{A}$ … padnutí lichého čísla

Neslučitelné jevy

Náhodné jevy se nazývají **neslučitelné** (disjunktní), jestliže platí $AB = \emptyset$.
Jevy $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ tvoří **systém neslučitelných jevů**, je-li $A_i A_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$.
Tento systém se nazývá **úplný**, je-li $A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n = I = \Omega$.

Jevové pole
$\mathcal{a}$ je množina všech různých podmnožin základního prostoru Ω, která vyhovuje těmto podmínkám:
- I leží v $\mathcal{a}$,
- leží-li jev A v $\mathcal{a}$, pak $\overline{A}$ rovněž leží v $\mathcal{a}$,
- leží-li jevy A,B v $\mathcal{a}$, pak $A+B$ a AB rovněž leží v $\mathcal{a}$ **.**

Pravděpodobnost
Reálnou funkci *P*, která přiřazuje každému jevu *A* z $\mathcal{a}$ přiřazuje reálné číslo *P(A)* nazveme pravděpodobnost, platí-li

(i) $P(A) \geq 0$ pro všechna $A \in \mathcal{a}$

(ii) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(iii) $P(A_1 + A_2 + A_3 + ...) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ...$,
kde jevy $A_1, A_2, A_3, ...$jsou po dvou neslučitelné.

Z předcházející definice se dají odvodit další vlastnosti pravděpodobnosti:

(iv) $P(I) = 1$, $P(\emptyset) = 0$

(v) $0 \leq P(A) \leq 1$

(vi) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

(vii) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Klasická definice pravděpodobnosti
Geometrická definice pravděpodobnosti
Statistická definice pravděpodobnosti

Podmíněná pravděpodobnost
Pravděpodobnost uskutečnění jevu A za předpokladu, že nastal jev B, se zapisuje $P(A/B)$ a nazývá se podmíněná pravděpodobnost. Je rovna:

(viii) $P(A/B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$

Poznámka: Vzorec (vii) zapisujeme často ve tvaru $P(AB) = P(A/B)P(B)$. S ohledem na komutativnost součinu jevů můžeme také psát $P(AB) = P(B/A)P(A)$.

Příklad: Dva dělníci vyrábějí stejný druh výrobků. První vyrábí 60 % a druhý 40 % denní produkce. Mezi výrobky prvního je 10 % zmetků a u druhého 5 % zmetků.
Z produkce určitého dne vybereme náhodně jeden výrobek. Určete pravěpodbnost toho, že vybraný výrobek je

a) zmetek vyrobený prvním dělníkem,
b) zmetek vyrobený druhým dělníkem,
c) zmetek.

Řešení:

Označme jevy A … byl vybrán výrobek prvního dělníka,

$\overline{A}$ … byl vybrán výrobek druhého dělníka,

B … byl vybrán zmetek.

Podle podmínek zadání platí:

$$P(A)=0,6,$$
$$P(\overline{A})=0,4,$$
$$P(B/A)=0,1,$$
$$P(B/\overline{A})=0,05.$$

ad a) $P(BA)=P(B/A)P(A)=0,1.0,6=0,06$

ad b) $P(B\overline{A})=P(B/\overline{A})P(\overline{A})=0,05.0,4=0,02$

ad c) Platí $B=BA+B\overline{A}$

(byl vybrán zmetek vyrobený prvním dělníkem

nebo

byl vybrán zmetek vyrobený druhým dělníkem)

Jevy BA a $B\overline{A}$ jsou neslučitelné (disjunktní), tedy

$P(B)=P(BA+B\overline{A})=P(BA)+P(B\overline{A})=0,06+0,02=0,08$

Nezávislé jevy

Dva jevy A, B se nazývají nezávislé, jestliže p-st jednoho z nich nezávisí na tom, zda se druhý jev uskutečnil či neuskutečnil, tj. platí-li

$P(A/B)=P(A)$ popř. $P(B/A)=P(B)$.

Také jevy A, B z nichž jeden má p-st rovnu nule, se nazývají nezávislé.

Věta: Dva jevy A, B jsou nezávislé právě tehdy, když $P(AB)=P(A)P(B)$.

Nezávislé pokusy

Často se stává, že náhodný pokus, jehož výsledkem je jev A, opakujeme n krát po sobě, aniž při tom měníme systém podmínek. Dále předpokládejme, že pokusy jsou na sobě nezávislé, takže p-st výsledku každého z těchto pokusů nezávisí na tom, jaké výsledky nastaly (resp. nastanou) u ostatních pokusů. Taková série pokusů se obvykle nazývá Bernoulliho posloupnost nezávislých pokusů.

Věta: Má-li jev A při každém pokusu stejnou p-st $P(A)=p$, pak p-st $P_k(A)$, že se jev A v Bernoulliho posloupnosti n nezávislých pokusů uskuteční právě k krát, je dána vzorcem

$$P_k(A)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Závislé pokusy

Mějme soubor N prvků, z nichž M má jistou vlastnost. Vybereme náhodně n prvků, přičemž vybrané prvky nevracíme. Jaká je p-st jevu A, že mezi vybranými je právě k prvků takových, že mají sledovanou vlastnost.

N ………….. počet všech prvků
M …………. počet těch, které mají sledovanou vlastnost
$N-M$ ……...počet těch, které nemají sledovanou vlastnost
n ……………počet vybraných
k ……………počet vybraných, které mají sledovanou vlastnost
$n-k$ …........ počet vybraných, které nemají sledovanou vlastnost

$\binom{N}{n}$ …….. počet případů možných

$\binom{M}{k}$ …….. počet možností jak vybrat k prvků, které mají sledovanou vlastnost

$\binom{N-M}{n-k}$ … počet možností jak vybrat $n-k$ prvků, které nemají sledovanou vlastnost

$\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}$ počet případů příznivých

hledaná p-st $\qquad P(A)=\dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$