ZÁKLADNÍ POJMY KOMBINATORIKY

Vybíráme k prvků z daných n prvků konečné množiny $\mathbf{N}$ $(k \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N})$ všech přirozených čísel a tvoříme (ne)uspořádané k-tice.

Nalezení všech možností

- ***kombinatorické pravidlo součtu***
- ***kombinatorické pravidlo součinu***
- definované základních pojmů (***permutace***, ***variace***, ***kombinace***)
- výpis všech možností (***tabulkové schéma***, ***logický strom možností***)
- využití některých prostředků z ***teorie grafů*** např. ve formě grafického znázornění úlohy a prohledávání grafu pro nalezení všech možných řešení.

1.1 KOMBINATORICKÉ PRAVIDLO SOUČTU

Množina A_1 obsahuje n_1 prvků,

Množina A_2 obsahuje n_2 prvků,

…,

Množina A_k má n_k prvků

Každé dvě z množin $A_1, A_2, \ldots, A_k$ jsou disjunktní (tzn. průnik libovolných dvou množin je prázdný), tj.

$A_i \cap A_j = \{\}$, pro $i \neq j$, kde $i, j = 1, 2, \ldots, k$,

Počet všech prvků sjednocení množin $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \bigcup_1^k A_i$ je roven součtu

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i. \tag{1.1}$$

1.2 KOMBINATORICKÉ PRAVIDLO SOUČINU

Množina A_1 obsahuje n_1 prvků,

Množina A_2 obsahuje n_2 prvků,
…,
Množina A_k má n_k prvků

Počet všech možných uspořádaných *k*-tic, jejichž první složkou je libovolný prvek množiny A_1, druhou složkou libovolný prvek množiny A_2, …, *k*-tou složkou libovolný prvek množiny A_k, je roven součinu

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i \qquad (1.2)$$

Příklad 1:

Kolik smíšených tanečních párů můžeme vytvořit z 10 dívek a 15 chlapců?

Příklad 2:

Kolik existuje dvojciferných přirozených čísel takových, v nichž se nevyskytuje stejná číslice?

Příklad 1:

Kolik existuje dvojciferných přirozených čísel takových, v nichž se nevyskytuje stejná číslice?

Určíme, kolik existuje dvojciferných čísel a poté z nich vyloučíme ta čísla, v nichž se vyskytuje stejná číslice (to jsou čísla 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 a 99).

Dvojciferná čísla jsou od 10 do 99, takže jich je **90**
(čísla 1 až 99, odečetli jsme 9 jednociferných čísel: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9).

Odečteme dalších 9 (to jsou čísla 11, 22,…, 99)

Výsledek

90 - 9 = 81.

Příklad 1:

Kolik existuje dvojciferných přirozených čísel takových, v nichž se nevyskytuje stejná číslice?

Položme si otázku:

Kolika různými číslicemi může takové dvojciferné číslo začínat? Zřejmě devíti číslicemi (jsou to 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9).

Kolika může pokračovat? Mohlo by sice pokračovat deseti číslicemi (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9), ale pokud chceme jen čísla, ve kterých se neopakují číslice, můžeme použít všechny číslice kromě té, která je na prvním místě. Použít tedy můžeme 9 číslic.

Celkový počet dvojciferných čísel, v nichž se neopakují číslice, je $9 \cdot 9 = 81$.

1.3 PERMUTACE

1.3.1 PERMUTACE BEZ OPAKOVÁNÍ

Obecně můžeme říci, že permutace n prvků bez opakování je každá uspořádaná n-tice vybraná z n prvků, přičemž každý prvek se v této permutaci vyskytuje právě jednou.

Zobecnění počtu permutací z n prvků - kombinatorické pravidlo součinu.

Chceme sestavit uspořádanou n-tici, přičemž máme k dispozici celkem n prvků.

Ptejme se:

Z kolika prvků máme na výběr pro první člen n-tice? ……………… n

Z kolika prvků máme na výběr pro druhý člen n-tice? ……………… $(n-1)$

Z kolika prvků máme na výběr pro třetí člen n-tice? ………………… $(n-2)$, atd.

Použitím pravidla součinu zjistíme, že počet všech permutací z *n* prvků je

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Počet permutaci bez opakování *n* prvků označíme $P(n)$.

$$P(n) = n! \qquad (1.3)$$

a nazýváme ho ***faktoriál*** čísla n.

Faktoriál je definován jako součin $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$ (1.4)
pro každé $n \in \mathbf{N}$.

$$0! = 1$$
$$1! = 1$$
$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$
$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$
$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$
$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$
$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$
$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040$$

....

Typové úlohy

- hledání způsobů rozsazení žáků ve vícemístné lavici
- hledání způsobů, jak lze seřadit děti do jednoho zástupu
- počet všech možných pořadí, v nichž závodní auta projedou cílem

Rozmyslet na cvičení

Příklad 2:

Mějme 6 různých závodních aut, označme si je například A, B, C, D, E, F. Jaký je:

a) počet všech možných pořadí, v nichž auta projedou cílem?

b) počet všech možných pořadí, v nichž auto A projede cílem dříve než B?

c) počet všech možných pořadí, v nichž auto B přijede hned po autu A?

1.3.2 PERMUTACE S OPAKOVÁNÍM

Permutace n prvků s opakováním $P'_{n_1,n_2,\dots,n_k}(n)$ je každá uspořádaná n-tice sestavená z těchto n prvků tak, že se v ní některé ze zvolených prvků mohou opakovat – v našem případě se první prvek opakuje n_1-krát, druhý prvek n_2-krát, až *k*-tý prvek n_k- krát a platí $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

Pro počet těchto permutací platí

$$P'_{n_1,n_2,\dots,n_k}(n) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} \tag{1.5}$$

Úlohy využívající permutace s opakováním jsou např.:

- Hledání počtu anagramů slov, kde se opakují daná písmena, např. MAMINKA
- Hledání způsobů, jak lze seřadit sedm kuliček (2 červené, 4 modré, 1 bílá)

Příklad 5:

Kolik anagramů (tj. slov vzniklých přeskupením písmen výchozího slova) lze vytvořit ze slova PRAHA?

Řešení: Všech písmen je pět, písmeno A se opakuje dvakrát, počet všech permutací s opakováním je tedy

$$P'_{2,1,1,1}(5) = \frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 60$$

Příklad 6:

Kolik různých šesticiferných čísel lze vytvořit z číslic 2, 3, 3, 4, 4, 4?

Řešení: K dispozici máme šest zadaných číslic a máme tvořit šesticiferná čísla. Ve vytvořených číslech se budou číslice 3 a 4 opakovat, záleží na pořadí číslic, využít musíme všechny číslice. Jedná se tedy o permutace s opakováním

$$P'_{1,2,3}(6) = \frac{6!}{1! \cdot 2! \cdot 3!} = 60$$

1.4 VARIACE

1.4.1 VARIACE BEZ OPAKOVÁNÍ

- obměna pořadí
- vybíráme k prvků ve stanoveném pořadí z daných n prvků.
- permutace je speciální případ variace, kdy $k = n$.

Požadavek: $k \leq n$, což ale není naprosto nutné.
Co by se tedy stalo, kdyby bylo $k > n$?

Ptáme se:

Z kolika prvků máme na výběr pro první člen k-tice? ………… n prvků.

Z kolika prvků máme na výběr pro druhý člen k-tice? ……… $(n-1)$ prvků.

Z kolika prvků máme na výběr pro třetí člen k-tice? ……… $(n-2)$ prvků.

Z kolika prvků máme na výběr pro poslední k- tý člen k-tice? …… $[n-(k-1)]$ prvků.

Schematicky lze situaci znázornit následovně:

uspořádaná *k*-tice	1. člen	2. člen	…	(*k*-1)-ní člen	*k*-tý člen
	↑	↑		↑	↑
počet možností výběru z n prvků	n	$n-1$		$n-(k-2)$	$n-(k-1)$

k-členná variace z n prvků $k,n \in N, k \leq n$ je každá uspořádaná k-tice sestavená z těchto n prvků tak, že všechny prvky v ní jsou různé (tj. neopakují se).

Počet všech takových variací $\mathrm{V}(k,n)$ určíme dle vzorce

$$\mathrm{V}(k,n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{1.6}$$

$$\mathrm{V}(n,n) = P(n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$$

Typové úlohy

- hledání všech trojciferných čísel z číslic 1, 3, 5, 9 bez opakování stejných cifer
- hledání všech trojbarevných vlajek, jsou-li k dispozici látky barvy černé, červené, zelené, bílé a žluté, pokud se barvy neopakují
- hledání anagramů (tj. slov vzniklých přeskupením písmen výchozího slova)

1.4.2 VARIACE S OPAKOVÁNÍM

k-členná variace s opakováním z n prvků je každá uspořádaná k-tice sestavená z těchto n prvků, přičemž všechny prvky v ní nemusí být různé (tj. mohou se opakovat).

Typové úlohy

- hledání všech znaků Morseovy abecedy složených z jednoho až čtyř signálů (tj. tečka či čárka)
- hledání všech možností trojmístného číselného kódu bezpečnostního zámku
- hledání všech státních poznávacích značek vozidel, je-li k dispozici 21 písmen a 9 cifer a jsou li ve tvaru: číslice, písmeno, číslice a k tomu čtyřciferné číslo
- vytváření čísel, kde se mohou opakovat číslice
- hledání kódu na zámku u kola

Příklad 8:

Zjistěte, kolik různých pěticiferných čísel lze vytvořit použitím cifer 1, 2, 3, 4, 5 (cifry se mohou v čísle opakovat).

Řešení:

Vzhledem k opakování cifer není možné využít permutace.

Nemůžeme využít ani permutace s opakováním, neboť není určeno, kolikrát která cifra se v daném čísle má opakovat.

Zadání problému přesně koresponduje s pojmem variace s opakováním, kde k = n. Počet všech možností je tedy

$$V'(5,5) = 5^5 = 3125$$