KOMBINACE

!! Nezáleží na pořadí prvků!!

KOMBINACE BEZ OPAKOVÁNÍ

k-členná kombinace bez opakování z *n* prvků je každá neuspořádaná *k*-tice (množina *k* prvků) vybraná z daných *n* prvků. V množině se žádné prvky neopakují (každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše jednou).

Opět se většinou, stejně jako u variací, požaduje $k \le n$, ale není to naprosto nezbytné. Počet těch-to kombinací znamená, kolik různých *k*-tic lze takto utvořit. Značíme ho $K(k,n)$ a počítáme podle vzorce

$$K(k,n) = \frac{V(k,n)}{k!} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \qquad (1.8)$$

$$K(k,n) = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k-1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} \qquad (1.9)$$

Symbol $\binom{n}{k}$ čteme „n nad k " a nazýváme ho ***kombinačním číslem***.

Pro každé $n, k \in \mathrm{N}_0, k \leq n$ platí: .

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Typickým příkladem kombinací jsou např.:

- hledání tří žáků z 20, jež zastoupí třídu na recitační soutěži
- hledání počtu cinknutí, pokud si vzájemně připíjí pět přátel
- hledání počtu zápasů, hraje-li sedm týmů systémem každý s každým

Příklad 9

Ze šesti kandidátů je třeba vybrat do komise tři. Kolika způsoby je to možné?

Řešení:

Ze šesti prvků dané množiny kandidátů máme vybrat tři prvky, přičemž nezáleží na pořadí. Tvoříme tříčlenné kombinace ze šesti prvků, jejichž počet je

$$K(3,6) = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$$

Základní vlastnosti kombinačních čísel

Pro každé $n, k \in \mathrm{N}_0, k \leq n$ platí následující vzorce (a), (b):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}. \qquad \text{(a)}$$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \qquad \text{(b)}$$

Příklady na výpočet kombinatorického čísla s užitím uvedených vztahů (a) a (b):

viz (a): $\binom{12}{3} = \frac{12!}{3! \cdot (12\text{-}3)!} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{3! \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3!} = \frac{1320}{6} = 220$

viz (b): $\binom{12}{9} = \binom{12}{12-9} = \binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1320}{6} = 220$

Kombinační čísla $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$ pro $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, lze zapsat do trojúhelníkového schématu, zvaného **Pascalův trojúhelník**.

Pro $n, k \in N,\ k \le n$ platí vztah (c)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \qquad \text{(c)}$$

přičemž $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ pro všechna přirozená čísla.

Ilustrační příklad pro využití vztahu (c):

$$\binom{8}{3} + \binom{8}{4} = \binom{8+1}{3+1} = \binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{3024}{24} = 126$$

Pascalův trojúhelník je geometrické uspořádání těchto binomických koeficientů.
V praxi využitelné schéma má pak obvykle následující tvar:/

$$
\begin{array}{lccccccccc}
n=0 & & & & & 1 & & & & \\
n=1 & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\vdots & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots &
\end{array}
$$

resp.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots &
\end{array}
$$

KOMBINACE S OPAKOVÁNÍM

k-členná kombinace s opakováním z n prvků $k, n \in N$ je každá neuspořádaná k-tice (množina k prvků) sestavená (vybraná) z těchto n prvků, přičemž všechny prvky v ní nemusí být nutně různé (tj. mohou se opakovat).

Počet všech takových kombinací s opakováním označíme $K'(k, n)$

Jejich počet určíme dle vzorce

$$\mathbf{K}'(k,n) = \binom{n+k-\mathbf{1}}{k} \tag{1.14}$$

Typové úlohy využívajících kombinací s opakování:

- hledání možnosti nákupu 4 lízátek z 6 nabízených druhů
- výběr 10 pohledů z nabízených 4 druhů
- hledání způsobů, kterými si mohou tři osoby rozdělit sedm stejných jablek

Příklad 11

V sáčku jsou červené, modré a zelené kuličky; kuličky téže barvy jsou nerozlišené. Určete, kolika způsoby lze vybrat pět kuliček, jestliže v sáčku je aspoň pět kuliček od každé barvy.

Řešení

- nezáleží na pořadí
- barvy kuliček se mohou opakovat

- 5-ti členná kombinace s opakováním ze tří prvků (pětice ze tří barev)

$$K'(5,3)=\binom{5+3-1}{5}=\binom{7}{5}=\frac{7!}{5!\cdot 2!}=21$$

Příklad 12

V prodejně mají na výběr z 12 různých pohlednic. Určete, kolika způsoby si z nich lze vybrat 7 pohledů.

Řešení:

Jedná se o sedmičlennou kombinaci s opakováním ze dvanácti prvků (mohu si koupit 7 různých pohledů, nebo i některé stejné!):

$$K'(7,12) = \binom{12+7-1}{7} = \binom{18}{7} = \frac{12!}{7! \cdot 5!} = 31824$$

Procvičení

http://www.ucebnice.krynicky.cz/Matematika/09_Kombinatorika_pravdepodobnost_statistika/1_Kombinatorika/9101_Zakladni_kombinatoricka_pravidla_I.pdf