TĚLESO RACIONÁLNÍCH ČÍSEL

Motivace zavedení

- Potřeba matematizovat nové problémy
- aby dělení bylo neomezeně proveditelné

postup rozšiřování množiny přirozených čísel

$$\begin{array}{ccccccc} & & C^{(Z)} & & & & \\ & \nearrow & & \searrow & & & \\ N & & & & Q & \rightarrow & R \quad \ldots\ldots \\ & \searrow & & \nearrow & & & \\ & & Q^{+} & & & & \end{array}$$

dnešní učebnice (školské zavedení)

$$N \rightarrow Q^{+} \rightarrow Q \rightarrow R$$

KONSTRUKCE TĚLESA RACIONÁLNÍCH ČÍSEL

Doplnění oboru integrity všech celých čísel $(Z,+,\cdot)$ na $(Q,+,\cdot)$ ..... dělení bez omezení

Další požadované vlastnosti

- aby se počítalo dle stejných pravidel jako v $(Z,+,\cdot)$
- aby celá čísla byla též racionální
- aby se každé racionální číslo dalo vyjádřit pomocí čísel celých

Definice

Komutativní těleso $(Q, +, \cdot)$ nazveme komutativním tělesem racionálních čísel právě tehdy, když platí

a) existuje podobor integrity $(Z^*, +, \cdot)$ komutativního tělesa $(Q, +, \cdot)$, který je izomorfní s oborem integrity $(Z, +, \cdot)$ všech celých čísel

b) každý prvek komutativního tělesa $(Q, +, \cdot)$ lze vyjádřit jako podíl dvou prvků z podoboru integrity $(Z^*, +, \cdot)$

Množina Q se nazývá <u>množina racionálních čísel</u> a její prvky <u>racionální čísla</u>.

Konstrukce

$M \subset Z \times Z$; prvky M .... uspořádané dvojice celých čísel (druhá složka $\neq 0$)

tyto uspořádané dvojice $[x, y]$ nazýváme ZLOMKY

zápis: $\frac{x}{y}$ x-čitatel, y-jmenovatel

$$M = \left\{ \frac{x}{y} \in Z \times Z \; ; \; y \neq 0 \right\}$$

v $\mathcal{M}$ definujeme relaci $\approx$

$$\approx = \left\{ \left[\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right] \in \mathcal{M}^2 ;\ ad = bc \right\}$$

$\approx$ je ekvivalence, vytvoří rozklad $\mathcal{M}$ na třídy ekvivalentních zlomků

- Třídu A (racionální číslo) označme uspořádanou dvojicí $[a, b]$
- každý zlomek patřící do racionálního čísla je reprezentantem racionálního čísla

např. $A = [5, 3] = \left\{ \frac{5}{3}, \frac{10}{6}, \frac{25}{15}, \frac{-15}{-9}, \ldots \right\}$

Definice součtu a součinu rac. čísel A, B

Definice: nechť jsou dána racionální čísla A, B, která jsou reprezentována zlomky $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$.

SOUČTEM A+B je racionální číslo reprezentované zlomkem $\frac{ad+bc}{bd} \in A+B$

stručně: je-li $\frac{a}{b} \in A$, $\frac{c}{d} \in B$, pak $\frac{ad+bc}{bd} \in A+B$

SOUČINEM $A \cdot B$ je racionální číslo reprezentované zlomkem $\frac{a \cdot c}{b d} \in A \cdot B$

stručně: je-li $\frac{a}{b} \in A$, $\frac{c}{d} \in B$, pak $\frac{a \cdot c}{bd} \in A \cdot B$

Součet ani součin nezávisí na volbě reprezentantů

$\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{8} = \frac{14}{24} \left(\frac{7}{12}\right)$ $\ldots$ $\frac{4}{6} \cdot \left(\frac{-21}{-24}\right) = \frac{-84}{-144} \left(= \frac{84}{144} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}\right)$

VLASTNOSTI

NULOVÝ PRVEK je racionální číslo $[0, x]$, $x \neq 0$

$$0 = \left\{ \frac{0}{x}, \frac{0}{y}, \dots \right\} = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{0}{4}, \frac{0}{5}, \dots \right\}$$

JEDNOTKOVÝ PRVEK je racionální číslo $[x, x]$, $x \neq 0$

$$1 = \left\{ \frac{x}{x}, \frac{y}{y}, \dots \right\} = \left\{ \frac{2}{2}, \frac{-3}{-3}, \frac{7}{7}, \dots \right\}$$

OPAČNÉ ČÍSLO k číslu $[a, b]$ je číslo $[-a, b] = [a, -b]$

$$-A = \left\{ \frac{-a}{b}, \frac{a}{(-b)}, \dots \right\}$$

ROZDÍL ČÍSEL $[a, b]$, $[c, d]$ je číslo $[a, b] - [c, d] =$

$= [a, b] + [-c, d] =$

$= [ad - bc, bd]$

$$A - B = \left\{ \frac{ad - bc}{bd}, \dots \right\}$$

PŘEVRÁCENÉ ČÍSLO k číslu $[a, b]$, $a \neq 0$ je číslo $[b, a]$

$$\frac{1}{A} = \left\{ \frac{b}{a}, \dots \right\}$$

PODÍL ČÍSEL $[a, b]$, $[c, d]$, $c \neq 0$ je číslo $[a, b] \cdot [d, c]$

$[a, b] \cdot [d, c] = [ad, bc]$

$$A : B = \left\{ \frac{ad}{bc}, \dots \right\}$$

RČ5

Podobor integrity $(Z^*, +, \cdot)$ komutativního tělesa $(Q, +, \cdot)$, který je izomorfní s $(Z, +, \cdot)$ existuje a uvedená čísla mají tvar $[xn, x]$, $x \neq 0$ celé, n celé číslo.

Pro každé racion. číslo $[a, b]$ platí:

$$[a,b] = [xa, x] \cdot [y, yb] = [xa, x] : [yb, y]$$

DĚLENÍ JE NEOMEZENĚ PROVEDITELNÉ

ALGEBRAICKÁ STRUKTURA $(Q, +, \cdot)$ JE KOMUTATIVNÍ TĚLESO

Reprezentace rac. čísla ZLOMKY

$A = [a, b]$

$\frac{a}{b} \in A$ .... $\frac{a}{b}$ je reprezentant čísla A

Zlomek $\frac{a}{b}$ je v základním tvaru $\Leftrightarrow$ a, b nesoudělná

Platí:

① $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

② $\frac{a}{b} = \frac{ah}{bh}$, je-li $h \neq 0$

③ $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$

④ $\frac{a}{b} \cdot k = \frac{ak}{b}$

⑤ $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

⑥ $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ $c \neq 0$

KLADNÁ A ZÁPORNÁ RACIONÁLNÍ ČÍSLA, USPOŘÁDÁNÍ TŘČ

Definice

Racionální číslo r je kladné rac. číslo $\Leftrightarrow$ buď $p>0 \wedge q>0$ nebo $p<0 \wedge q<0$, kde $\frac{p}{q}=r$

Platí: je-li $a, b \in Q^+$ pak i $a+b \in Q^+$
$a \cdot b \in Q^+$

Definice

Racionální číslo r je záporným racionálním číslem $\Leftrightarrow$ $-r$ je kladným racion. číslem

Platí: a) r je racionální číslo, pak $r \in Q^+$ / $r \in Q^-$ / $r = 0$

b) opačné číslo ke kladnému rac. číslu je záporné rac. číslo a naopak

Definice

Nechť a, b jsou racionální čísla; a je menší než b $(a<b) \Leftrightarrow$ rozdíl $b-a$ je kladné racionální číslo.

Platí: nechť a, b, c jsou rac. čísla. Pak

a) je-li $a<b$, pak není $b<a$

b) je-li $a<b \wedge b<c$ pak $a<c$

c) je-li $a \neq b$, pak $a<b \vee b<a$

d) neplatí $a<a$

Relace $<$ je relace ostrého lineárního uspořádání v množině racionálních čísel Q

RČ6b

Definice:

Říkáme, že lineárně uspořádaná množina $(M, \leq)$ je hustě uspořádaná relací $\leq$ právě když pro každé $a, b \in M$, $a \underset{S}{<} b$ ex. $c \in M$ tak, že $a \underset{S}{<} c \underset{S}{<} b$.

Platí: Množina racionálních čísel je relací lineárního uspořádání $<$ hustě uspořádána.

ABSOLUTNÍ HODNOTA RACION. ČÍSLA. ČÍSELNÁ OSA

- definována stejně jako u celých čísel
- vlastnosti stejné

navíc: $|a:b| = |a|:|b| \quad b \neq 0$

Znázornění racionálních čísel na číselné ose

$0 \ldots\ldots P \in p$

$1 \ldots\ldots J \in p$

pak každému rac. číslu přiřadíme právě 1 bod na p

- zobrazení prosté do:

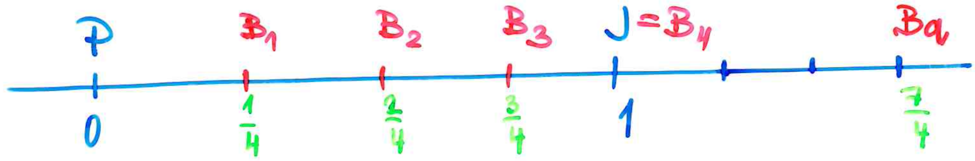
a) číslu 0 přiřazen P

b) kladným rac. č. body $\mapsto PJ$ tak, že r $(r > 0)$

$r = \frac{a}{b}$, a, b stejná znaménka $(a > 0, b > 0)$

úsečku PJ rozdělíme na b stejných dílů

$r = \frac{7}{4}$



c) záp. rac. číslo r ($-r$ je kladné!)

- sestrojíme obraz $-r$
- středová souměrnost podle P $\rightarrow$ obraz čísla r

obrazy všech záporných racionálních čísel leží na polopřímce opačné k $\mapsto PJ$

p .... číselná osa

$\rightarrow$ PJ ... kladná část

opačná $\mapsto$ PJ ... záporná část } číselné osy

KONSTRUKCE TĚLESA REÁLNÝCH ČÍSEL $(R, +, \cdot)$

obtížné!, nelze popsanými způsoby z či Q

Definice:

Algebraickou strukturu $(R, +, \cdot)$ nazveme tělesem reálných čísel, právě když má vlastnosti:

1. $(R, +, \cdot)$ je komutativní těleso
2. $(R, +, \cdot)$ obsahuje podtěleso $(Q^*, +, \cdot)$ izomorfní s tělesem racion. čísel $(Q, +, \cdot)$
3. R je hustě uspořádaná množina
4. R je spojitě uspořádaná množina (nemá mezery)