Matematika 1

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

1. Přednáška

Základní pojmy výrokové logiky

Matematický text je členěn na :

Definice
Věty
Příklady

Definice - zavádí pojmy (vysvětluje význam matematických termínů)

Věta - je formulována jako výrok (tj. lze rozhodnout, zda je pravdivá či nepravdivá)
- má jednu z následujících struktur

$a)\quad A \Longrightarrow B$ jestliže A, pak B (z A plyne B)
$b)\quad A \Longleftrightarrow B$ A právě tehdy, když B (A je ekvivalentní B)

Implikace $A \Longrightarrow B$
B je nutnou podmínkou platnosti A
A je postačující podmínkou platnosti B

Ekvivalence $A \Longleftrightarrow B$
A je nutnou a postačující podmínkou platnosti B

Příklad - demonstruje obecné pojmy v konkrétních situacích

Číselné množiny

Přirozená čísla

$$N = \{1,\, 2,\, 3,\, \dots\}\ .$$

Celá čísla

$$Z = \{\dots, -3,\, -2,\, -1,\, 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, \dots\}\ .$$

Racionální čísla

$$Q = \{\frac{p}{q};\ p, q \in Z,\ q \neq 0\}\ .$$

$N \subset Z \subset Q$.
$N \neq Z \qquad -1 \notin N$
$Z \neq Q \qquad \frac{2}{3} \notin Z$
- lze znázornit na reálné ose
N, Z, Q jsou uspořádány $x < y$ (x leží na reálné ose vlevo od y)
$x \leq y$ (x leží na reálné ose vlevo od y nebo na y)

Číselné množiny

Věta
Množina racionálních čísel je hustě rozložena na ose reálných čísel.

význam : $x, y \in R \;\; x < y \implies \exists r \in Q$ tak, že $x < r < y$
(mezi každými dvěmi reálnými čísly lze nalézt nějaké racionální číslo)

$\sqrt{2} \notin Q$
Reálná čísla
R ... číslo, kterému na reálné ose odpovídá bod
Iracionální čísla
$I = R \setminus Q$

$Q \subset R$.
$Q \neq R \qquad \sqrt{2} \notin Q$
R jsou uspořádány binární relací $<, \leq$ (resp. $>, \geq$)

Číselné množiny

Rozšířená reálná osa
$R^* = R \cup \{+\infty, -\infty\}$

Operace s nekonečny
Je-li $a \in R$, definujeme

$\infty + \infty = a + \infty = \infty + a = \infty$ nelze $\infty - \infty$

$(-\infty) + (-\infty) = a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$

$\infty - (-\infty) = a - (-\infty) = a - (-\infty) = \infty$

$-\infty - \infty = a - \infty = -\infty + a = -\infty$

$\infty.\infty = (-\infty).(-\infty) = \infty$

$\infty.(-\infty) = (-\infty).\infty = -\infty$

$$a.\infty = \infty.a = \begin{cases} \infty & \text{pro } a > 0 \\ -\infty & \text{pro } a < 0 \end{cases}$$ nelze $0.\infty$

$$a.(-\infty) = (-\infty).a = \begin{cases} -\infty & \text{pro } a > 0 \\ \infty & \text{pro } a < 0 \end{cases}$$ nelze $0.(-\infty)$

Číselné množiny

$$\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$$

$$\frac{\infty}{a} = \begin{cases} \infty & \text{pro } a > 0 \\ -\infty & \text{pro } a < 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \text{nelze } \frac{\infty}{0} \\ \text{nelze } \frac{\infty}{\infty} \end{matrix}$$

$$\frac{-\infty}{a} = \begin{cases} -\infty & \text{pro } a > 0 \\ \infty & \text{pro } a < 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \text{nelze } \frac{-\infty}{0} \\ \text{nelze } \frac{-\infty}{-\infty} \; \frac{-\infty}{\infty} \; \frac{\infty}{-\infty} \end{matrix}$$

Číselné množiny

Definice
Nechť $A \subset R$. Číslo $a \in A$ nazýváme **maximum nmožiny A**, jestliže platí

$$x \in A \implies x \leq a$$

značíme $a = \max A$.
Číslo $b \in A$ nazýváme **minimum nmožiny A**, jestliže platí

$$x \in A \implies b \leq x$$

značíme $b = \min A$.

Příklad
1) A konečná $\implies$ existuje $\max A$ $\min A$.
2) A nekonečná, pak nemusí existovat maximum ani minimum A.
   N
   $(0, 1)$

Číselné množiny

Definice
Množina $A \subset R$ se nazývá **shora omezená**, jestliže existuje $c \in R$ takové, že platí

$$x \in A \implies x \leq c$$

Číslo c se nazývá **horní závora množiny A**.
Množina $A \subset R$ se nazývá **zdola omezená**, jestliže existuje $d \in R$ takové, že platí

$$x \in A \implies d \leq x$$

Číslo d se nazývá **dolní závora množiny A**.
Množina $A \subset R$ se nazývá **omezená**, je-li omezená shora i zdola.

Poznámka
Čísla $c, \ d$ nemusí patřit do množiny A.

Příklad
$A = (0, 1)$ $\quad$ 2 je horní závora
$\qquad\qquad\quad$ -1 je dolní závora.

Číselné množiny

Věta (o supremu)
Nechť $A \subset R$, $A \neq \emptyset$, shora omezená. Pak existuje právě jedno $M \in R$ těchto dvou vlastností
1) $x \leq M \quad \forall x \in A$
2) Je-li $M_1 < M \implies$ existuje alespoň jedno $x_1 \in A$ takové, že $M_1 < x_1$.

Definice
Číslo $M \in R$ splňující vlastnosti 1) a 2) nazýváme
supremum množiny A.
značíme $M = \sup A$

Poznámka
Supremum množiny A je nejmenší horní závora.

Příklad
$A = (0, 1) \quad 1 = \sup A$

Číselné množiny

Poznámka (význam věty o supremu)
Věta o supremu říká, že každá neprázdná, shora omezená podmnožina množiny reálných čísel má právě jedno supremum.

Poznámka
1) Je-li c je maximum množiny A, pak c je supremum A.
Příklad
$A =< 1, 4 >$
2) Je-li c je supremum množiny A, pak c nemusí být maximem A.
Příklad
$A = (1, 3)$

Číselné množiny

Definice
Nechť $A \subset R,\ A \neq \emptyset$. Pak $m \in R$ nazýváme
infimum množiny A, jestliže platí
1) $x \geq m \quad \forall x \in A$
2) Je-li $m_1 > m \implies$ existuje alespoň jedno $x_1 \in A$ takové, že $x_1 < m_1$.
značíme $m = \inf A$

Věta (o infimu)
Nechť $A \subset R,\ A \neq \emptyset$, zdola omezená. Pak existuje právě jedno infimum množiny A.

Poznámka
Věta o supremu neplatí, omezíme-li se při řešení matematických úloh pouze na racionální čísla (jsou mezi nimi díry), což by vedlo k problémům s existencí řešení řady úloh.