# Matematika 1

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

6. Přednáška

# Geometrické aplikace

**Věta**

Nechť $f$ je funkce spojitá na intervalu $I$. Má-li funkce $f$ ve všech vnitřních bodech intervalu $I$ $\left\{\begin{array}{l}\text{kladnou}\\ \text{nezápornou}\\ \text{zápornou}\\ \text{nekladnou}\\ \text{nulovou}\end{array}\right\}$ derivaci, pak je funkce $f$ na $I$ $\left\{\begin{array}{l}\text{rostoucí}\\ \text{neklesající}\\ \text{klesající}\\ \text{nerostoucí}\\ \text{konstantní}\end{array}\right\}$.

**Příklad**

Vyšetřete monotonii funkce $f(x) = 2x + \sin x$.

# Geometrické aplikace

**Věta 5.7** (l'Hospitalovo pravidlo)
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ nebo $\lim_{x\to a} |g(x)| = \infty$ a je-li $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$, pak $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b$.

**Poznámka**
Věta platí i pro nevlastní limity, limity a nevlastní limity v nevlastních bodech, jednostranné limity a nevlastní jednostranné limity.

**Příklad**
Určete $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}$.

**Poznámka** (triky na úpravu součinu, rozdílu a mocniny)

$$fg = \frac{f}{\frac{1}{g}} = \frac{g}{\frac{1}{f}}$$

$$f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}}$$

$$f^g = e^{g \ln f}$$

# Lokální extrémy

**Definice**

Řekneme, že funkce $f$ má v bodě $a$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{lokální maximum} \\ \text{lokální minimum} \\ \text{globální maximum} \\ \text{globální minimum} \end{array} \right\}$, jestliže

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{existuje okolí } U \text{ bodu } a \text{ takové, že pro všechna } x \in U \text{ je } f(x) \leq f(a). \\ \text{existuje okolí } U \text{ bodu } a \text{ takové, že pro všechna } x \in U \text{ je } f(x) \geq f(a). \\ \text{pro všechna } x \in D(f) \text{ je } f(x) \leq f(a). \\ \text{pro všechna } x \in D(f) \text{ je } f(x) \geq f(a). \end{array} \right.$$

Má-li funkce $f$ v bodě $a$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{lokální maximum nebo lokální minimum,} \\ \text{globální maximum nebo globální minimum,} \end{array} \right\}$

řekneme, že má v $a$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{lokální extrém.} \\ \text{globální extrém.} \end{array} \right.$

**Příklad**

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = x^2$.

# Lokální extrémy

**Věta 6.1**
Má-li funkce $f$ v bodě $a$ lokální extrém a má-li v bodě $a$ derivaci, pak $f'(a) = 0$.

**Definice**
Body, v nichž má funkce derivaci rovnu nule, budeme nazývat jejími stacionárními body.

**Příklad**
Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = x^3$.

# Lokální extrémy

**Věta 6.2** (postačující podmínky pro lokální extrémy)
Nechť je funkce $f$ spojitá v bodě $a$.
a) Existuje-li okolí $U$ bodu $a$ takové, že pro všechna $x \in U,\ x < a$, je $f'(x) \geq 0$ a pro všechna $x \in U,\ x > a$, je $f'(x) \leq 0$, pak má funkce $f$ v bodě $a$ lokální maximum.
b) Existuje-li okolí $U$ bodu $a$ takové, že pro všechna $x \in U,\ x < a$, je $f'(x) \leq 0$ a pro všechna $x \in U,\ x > a$, je $f'(x) \geq 0$, pak má funkce $f$ v bodě $a$ lokální minimum.
c) Existuje-li okolí $U$ bodu $a$ takové, že pro všechna $x \in U,\ x \neq a$, je $f'(x) > 0$ nebo pro všechna $x \in U,\ x \neq a$, je $f'(x) < 0$, pak funkce $f$ nemá v bodě $a$ lokální extrém.

**Příklad**
Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = |x^2 - 4|$.

# Lokální extrémy

**Věta 6.3**

Má-li funkce $f$ druhou derivaci ve svém stacionárním bodě $a$ a je-li $\left\{ \begin{array}{l} f''(a) < 0, \\ f''(a) > 0, \end{array} \right\}$

pak má funkce $f$ v bodě $a$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{lokální maximum.} \\ \text{lokální minimum.} \end{array} \right.$

**Příklad**

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 28x$

**Poznámka**

Abychom nalezli body, v nichž má funkce globální extrémy, stačí vyšetřit všechny body, v nichž má lokální extrémy, a všechny hraniční body jejího definičního oboru.

# Konvexnost, konkávnost a inflexe.

**Definice**

Má-li funkce $f$ derivaci v bodě $a$, řekneme, že je $\left\{ \begin{array}{l} \text{v bodě } a \text{ konvexní,} \\ \text{v bodě } a \text{ konkávní,} \end{array} \right\}$ jestliže existuje okolí $U$ bodu $a$ takové, že pro všechna $x \in U$, $x \neq a$, je

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) > f'(a)(x-a) + f(a). \\ f(x) < f'(a)(x-a) + f(a). \end{array} \right.$$

**Poznámka**

Geometrický to znamená, že v nějakém okolí $U$ bodu $a$ probíhá graf konvexní funkce nad tečnou v bodě $A = [a, f(a)]$, graf konkávní funkce $f$ pod tečnou v bodě $A = [a, f(a)]$.

# Konvexnost, konkávnost a inflexe.

**Definice**
Má-li funkce $f$ derivaci v bodě $a$, řekneme, že má v $a$ inflexi, jestliže existuje okolí $U$ bodu $a$ takové, že
pro všechna $x \in U$, $x < a$, je $f(x) \leq f'(a)(x-a) + f(a)$
a pro všechna $x \in U$, $x > a$, je $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$
nebo pro všechna $x \in U$, $x < a$, je $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$
a pro všechna $x \in U$, $x > a$, je $f(x) \leq f'(a)(x-a) + f(a)$.

**Příklad** Nalezněte inflexní body funkce
1) $f(x) = x^2$
2) $f(x) = x^3$

**Věta 6.4** (postačující podmínka pro konvexnost a konkávnost)
Má-li funkce $f$ druhou derivaci v bodě $a$ a je-li $\left\{ \begin{array}{c} f''(a) > 0, \\ f''(a) < 0, \end{array} \right\}$ pak je funkce $f$ v bodě $a$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{konvexní.} \\ \text{konkávní.} \end{array} \right.$

# Konvexnost, konkávnost a inflexe.

**Příklad**

Vyšetřete konvexnost, resp. konkávnost, funkce $f(x) = e^x$ v bodě $1$.

**Definice**

Řekneme, že funkce $f$ je $\left\{ \begin{array}{l} \text{konvexní na množině } M \subset D(f'), \\ \text{konkávní na množině } M \subset D(f') \end{array} \right\}$ jestliže je $\left\{ \begin{array}{l} \text{konvexní} \\ \text{konkávní} \end{array} \right.$ v každém $a \in M$.

**Příklad**

Zjistěte, kde je konvexní a kde konkávní funkce $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ definovaná na $R$.

# Konvexnost, konkávnost a inflexe.

**Věta 6.5**

Má-li funkce $f$ inflexi v bodě $a$ a má-li v bodě $a$ druhou derivaci, pak $f''(a) = 0$.

**Příklad**

Nalezněte inflexní body funkce $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

# Konvexnost, konkávnost a inflexe.

**Věta 6.6**

Nechť funkce $f$ má spojitou derivaci v bodě $a$

a) Existuje-li okolí $U$ bodu $a$ takové, že

1) pro všechna $x \in U$, $x < a$, je $f''(x) \leq 0$
a pro všechna $x \in U$, $x > a$, je $f''(x) \geq 0$

nebo

2) pro všechna $x \in U$, $x < a$, je $f''(x) \geq 0$
a pro všechna $x \in U$, $x > a$, je $f''(x) \leq 0$,

pak má funkce $f$ v bodě $a$ inflexi.

b) Existuje-li okolí $U$ bodu $a$ takové, že

pro všechna $x \in U$, $x \neq a$, je $f''(x) > 0$

nebo

pro všechna $x \in U$, $x \neq a$, je $f''(x) < 0$,

pak nemá funkce $f$ v bodě $a$ inflexi.

**Poznámka**

V případě a) mění druhá derivace $f''$ své hodnoty v bodě $a$ z nekladných na nezáporné nebo naopak.
V případě b) v bodě $a$ nemění znaménko.

# Konvexnost, konkávnost a inflexe.

**Příklad**

Nalezněte inflexní body funkce $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

**Věta 6.7**

Je-li $f''(a) = 0$ a $f'''(a) \neq 0$, pak má funkce $f$ v bodě $a$ inflexi.

**Příklad**

Nalezněte inflexní body funkce $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

# Asymptoty

**Definice**

Řekneme, že funkce $f$ má svislou asymptotu $x = a$, jestliže má v bodě $a$ alespoň jednu nevlastní jednostrannou limitu.

**Příklad**

Určete svislé asymptoty funkcí
1) $f(x) = \frac{1}{x+1}$
2) $f(x) = \ln x$

**Definice**

Řekneme, že funkce $f$ má šikmou asymptotu $y = ax + b$, jestliže

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - ax - b] = 0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - ax - b] = 0 \,.$$

**Příklad**

Určete šikmé asymptoty funkcí
1) $f(x) = \frac{1}{x+1}$
2) $f(x) = \ln x$
3) $f(x) = \mathrm{arctg} x$

# Asymptoty

**Věta 6.8**

Funkce $f$ má šikmou asymptotu $y = ax + b$, právě když

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x \to \infty} \left[ f(x) - ax \right] ,$$

nebo

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x \to -\infty} \left[ f(x) - ax \right] .$$

**Příklad**

Určete šikmé asymptoty funkce $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3x + 2}$.

$(y = x + 3)$

# Asymptotes

## Definition

We say that the graph of function $f$ has vertical asymptote $x = a$ if

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{or} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \ .$$

We say that the graph of function $f$ has asymptote $y = kx + q$ if

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - kx - q] = 0 \quad \text{or} \quad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - kx - q] = 0 \ .$$

## Theorem

The graph of function $f$ has asymptote $y = kx + q$ if and only if

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad q = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx] \ ,$$

or

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad q = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - kx] \ .$$