Matematika 1

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

7. Přednáška

Průběh funkce

Hledáme podstatné charakteristiky funkce umožňující nakreslit její graf.

PROGRAM
1. Nalezneme definiční obor funkce f.
2. Nalezneme limity v „krajních“ bodech definičního oboru a v bodech nespojitosti funkce f.
3. Určíme obory monotónie a lokální extrémy.
4. Určíme obory konvexnosti, konkávnosti a inflexní body.
5. Určíme šikmé asymptoty, existují-li.
6. Určíme další charakteristiky, jako průsečíky s osami souřadnic, strmost v inflexních bodech ...
7. Nakreslíme graf.

Poznámka
Pořadí neni třeba dodržovat, některé části můžeme podle okolností i vypustit.

Příklad
Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

Diferenciály

Definice
Funkce f se nazývá **diferencovatelná v bodě a**, jestliže existuje číslo c takové, že

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{x - a} = 0 \ .$$

Věta 7.1. (souvislost diferencovatelnosti s derivací)
Funkce f je diferencovatelná v bodě a, právě když má v a derivaci. Je-li tato podmínka splněna, pak

$$c = f'(a) \ .$$

Definice
Je-li funkce f diferencovatelná v bodě a, pak funkci df_a definovanou na R předpisem

$$df_a(x) = f'(a)(x - a) \tag{1}$$

nazýváme **diferenciál funkce f v bodě a**.

Příklad
Zjistěte, zda je funkce $f(x) = \sqrt{x + 1}$ diferencovatelná v 0 a v kladném případě určete její diferenciál v tomto bodě.

Poznámka
Platí tedy

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - df_a(x)}{x - a} = 0 \ .$$

Označení
Rozdíl $(x - a)$ v (1) se někdy značí h, Δx nebo dx.

Chyba v bodě x.

$$\omega(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) = f(x) - f(a) - df_a(x) \ .$$

Poznámka
Je-li funkce f definovaná v bodech a a x, pak přírůstkem nezávisle proměnné se rozumí rozdíl

$$x - a \ ,$$

přírůstkem funkce rozdíl

$$f(x) - f(a).$$

Diferenciály

Tečna funkce f v bodě $A = [a, f(a)]$

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) = f(a) + df_a(x) \ .$$

Grafem diferenciálu funkce f v bodě a je tedy přímka procházející bodem $A_1 = [a, 0]$ a rovnoběžná s tečnou grafu v bodě A.