

Matematika 1

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

10. Přednáška

Polynomy

Definice

Polynomem se rozumí funkce f definovaná na R vztahem

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 ,$$

kde $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_0, a_1, \dots, a_m \in R$ se nazývají **koeficienty polynomu f** .

Je-li $a_m \neq 0$, řekneme, že polynom f je **m -tého stupně**.

Nulovému polynomu nepřičítáme stupeň.

Věta 9. 11.

Číslo $a \in R$ je kořenem polynomu f , právě když existuje polynom g takový, že pro každé $x \in R$ platí

$$f(x) = (x - a) \cdot g(x) .$$

Polynomy

Definice

Je-li číslo a kořenem polynomu f , pak lineární funkci $x - a$ nazveme **kořenový činitel** příslušný kořenu a .

Je-li k přirozené číslo, f polynom, $a \in R$, řekneme, že číslo a je **k -násobným kořenem polynomu f** , jestliže existuje polynom h takový

$$f(x) = (x - a)^k h(x)$$

pro všechna $x \in R$ a

$$h(a) \neq 0 .$$

Příklad

Určete kořeny polynomu $f(x) = x^3 - 8x^2 + 21x - 18$.

Poznámka

Existují polynomy nenulového stupně, které nemají v R kořen.

(Např. $f(x) = x^2 + 1$)

Polynomy

Věta 9.12. (Základní věta algebry)

Polynom m -tého stupně má v množině \mathbf{C} právě m kořenů, pokud každý kořen považujeme za tolik kořenů, jaká je jeho násobnost.

Důsledek (o kořenovém rozkladu v \mathbf{C})

Každý polynom f m -tého stupně, $m \geq 1$, lze napsat ve tvaru

$$f(x) = a_m(x - c_1)^{\kappa_1}(x - c_2)^{\kappa_2} \dots (x - c_r)^{\kappa_r},$$

kde $c_1, c_2, \dots, c_r \in \mathbf{C}$, $r \leq m$ a $\kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_r = m$.

Příklad

Určete kořeny polynomu $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ a napište jeho kořenový rozklad na kořenové činitele v \mathbf{C} .

Věta 9.13. (o sdruženosti kořenů)

Má-li polynom s *reálnými koeficienty* v \mathbf{C} k -násobný kořen a , pak má také k -násobný komplexně sdružený kořen \bar{a} .

Polynomy

Věta 9.14. (o kořenovém rozkladu v R)

Každý polynom s reálnými koeficienty $f(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ lze vyjádřit ve tvaru tzv. kořenového rozkladu

$$f(x) = a_m (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_r)^{k_r} \\ (x^2 - \beta_1 x + \gamma_1)^{l_1} \dots (x^2 - \beta_s x + \gamma_s)^{l_s} ,$$

kde $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ jsou všechny navzájem různé reálné kořeny polynomu f ,

k_1, \dots, k_r jsou jejich násobnosti,

$(x^2 - \beta_j x + \gamma_j)$ pro $j = 1, \dots, s$ jsou kvadratické trojčleny, které nelze v R rozložit na součin lineárních členů ($D < 0$).

Přitom platí

$$k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2(l_1 + \dots + l_s) = m \quad \text{tj. stupeň } f(x) .$$

Racionální funkce

Definice.

Racionální funkcí $R(x)$ se nazývá podíl dvou polynomů, tj.

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde $Q(x)$ je nenulový polynom.

Je definována pro všechna x , pro která je $Q(x) \neq 0$.

Racionální funkci, u níž stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele, nazýváme **ryze racionální funkcí**, v ostatních případech mluvíme o **neryze racionální funkci**.

Věta 9.15.

Neryze racionální funkce $\frac{P(x)}{Q(x)}$ je buďto polynom, nebo ji lze zapsat ve tvaru součtu polynomu M a ryze racionální funkce $\frac{N(x)}{Q(x)}$, tj.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{N(x)}{Q(x)}. \quad (1)$$

Příklad

Vyjádřete racionální funkci $\frac{x^3+1}{x^2-3x+2}$ ve tvaru (1).

Racionální funkce

Definice.

Parciálními zlomky nazýváme tyto dva druhy zlomků

$$\frac{A}{(x - r)^k},$$
$$\frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^k}$$

kde $A, B, C, r, p, q \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ a přitom musí být splněna podmínka $p^2 - 4q < 0$.

Věta 9.16. (o rozkladu na parciální zlomky)

Každou ryze racionální funkci lze vyjádřit ve tvaru součtu parciálních zlomků.

Postup rozkladu ryze racionální funkce na parciální zlomky

1. Polynom $Q(x)$ napíšeme ve tvaru kořenového rozkladu v R , tj.

$$Q(x) = a_m(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_r)^{k_r} \\ (x^2 - \beta_1x + \gamma_1)^{l_1} \dots (x^2 - \beta_sx + \gamma_s)^{l_s} ,$$

2. Každý člen $(x - r)^k$ přispívá do rozkladu těmito členy:

$$\frac{A_k}{(x - r)^k}, \frac{A_{k-1}}{(x - r)^{k-1}}, \dots, \frac{A_1}{x - r},$$

kde čísla A_1, \dots, A_k určíme později.

3. Každý člen $(x^2 + px + q)^l$ přispívá do rozkladu těmito členy:

$$\frac{B_lx + C_l}{(x^2 + px + q)^l}, \frac{B_{l-1}x + C_{l-1}}{(x^2 + px + q)^{l-1}}, \dots, \frac{B_1x + C_1}{x^2 + px + q},$$

kde čísla $B_1, \dots, B_l, C_1, \dots, C_l$ určíme později.

Postup rozkladu ryze racionální funkce na parciální zlomky

4. Napíšeme rovnost

$$\frac{N(x)}{Q(x)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{všechny série parciálních zlomků} \\ \text{určených z kořenového rozkladu} \end{array} \right\}$$

5. Předchozí rovnost vynásobíme polynomem $Q(x)$, čímž získáme rovnost dvou polynomů

$$N(x) = \left\{ \begin{array}{l} \text{všechny série parciálních zlomků} \\ \text{určených z kořenového rozkladu} \end{array} \right\} \cdot Q(x)$$

6. Konkrétní hodnoty A_k , B_l , C_l získáme tak, že porovnáme koeficienty u stejných mocnin na levé a pravé straně předchozích rovností
- metoda neurčitých koeficientů.

Postup rozkladu ryze racionální funkce na parciální zlomky

Poznámka.

Bilanční rovnice pro porovnání koeficientů tvoří soustavu n lineárních rovnic pro n neznámých. Takto vzniklá soustava má vždy právě jedno řešení.

Příklad

Rozložte na parciální zlomky ryze racionální funkci

$$f(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 + 3x + 2}{x^4 + x^2} .$$

Postup integrování racionální funkce

1. Racionální funkci napíšeme v tzv. kanonickém tvaru $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

2. Polynom $P(x)$ dělíme se zbytkem polynomem $Q(x)$, tj.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{N(x)}{Q(x)},$$

kde $st N(x) < st Q(x)$.

Poznámka: Pokud $st P(x) < st Q(x)$ bod 2. přeskočíme.

3. Provedeme rozklad zbytku $\frac{N(x)}{Q(x)}$ na parciální zlomky.

4. Integrujeme postupně členy polynomu a jednotlivé parciální zlomky.

Postup integrování racionální funkce

Integrace parciálních zlomků

$$\int \frac{A}{(x-r)^k} dx =$$
$$\int \frac{Bx+c}{x^2+px+q} dx =$$
$$\int \frac{Bx+c}{(x^2+px+q)^k} dx =$$

Příklad

$$\int \frac{2x^3 + 2x^2 + 3x + 2}{x^4 + x^2} dx =$$

$$\int \frac{5x + 3}{x^2 - x + 1} dx =$$