

# Matematika 1

Petr Salač a Jiří Hozman  
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická  
Technická univerzita v Liberci  
petr.salac@tul.cz  
jiri.hozman@tul.cz

11. Přednáška

# Nevlastní integrál

Určitý integrál jsme definovali pro:

- konečný interval  $[a, b]$ , (tj.  $a, b \in \mathbb{R}$ )
- omezenou funkci  $f$ , (tj.  $|f(x)| < M$  na  $[a, b]$ ).

Nyní rozšíříme definici určitého integrálu na:

- nekonečné intervaly  $[a, \infty)$ ,  $(-\infty, a]$ ,  $(-\infty, \infty)$
- neomezené funkce.

# Nevlastní integrál

**Definice.** (nevlastní integrál vlivem meze)

Předpokládáme, že funkce  $f$  je definována na intervalu  $[a, \infty)$  a integrovatelná na každém intervalu  $[a, r]$  pro libovolné  $r > a$ , potom definujeme **nevlastní integrál funkce  $f$  na intervalu  $[a, \infty)$**  jako limitu

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^r f(x) dx . \quad (1)$$

Jestliže tato limita je reálné číslo, říkáme, že **nevlastní integrál  $\int_a^{\infty} f(x) dx$**  konverguje (k tomuto číslu).

Jestliže limita neexistuje, nebo je  $\pm\infty$ , říkáme, že **nevlastní integrál diverguje**.

Analogicky definujeme **nevlastní integrál funkce  $f$  na intervalu  $(-\infty, a]$**  jako limitu

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^a f(x) dx . \quad (2)$$

Pomocí nevlastních integrálů (1) a (2) definujeme **nevlastní integrál funkce  $f$  na intervalu  $(-\infty, \infty)$**  takto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx , \quad (3)$$

kde  $a \in \mathbb{R}$  libovolné.

# Nevlastní integrál

## Příklad

Vypočítejte nevlastní integrál

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

## Příklad

Vypočítejte nevlastní integrál

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

## Příklad

Vypočítejte nevlastní integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

# Nevlastní integrál

## Poznámka

Geometrická interpretace konvergentního nevlastního integrálu opět vyjadřuje obsah obrazce ohraničeného grafem funkce  $f$ , osou  $x$  a přímkou  $a = x$ .

**Věta 10.1.** (srovnávací kritérium pro určení konvergence nevlastního integrálu)  
Platí-li pro dvě funkce  $f$  a  $g$  na intervalu  $[a, \infty)$  nerovnost

$$0 \leq f(x) \leq g(x) ,$$

potom z konvergence  $\int_a^\infty g(x) dx$  vyplývá konvergence  $\int_a^\infty f(x) dx$   
a z divergence  $\int_a^\infty f(x) dx$  vyplývá divergence  $\int_a^\infty g(x) dx$ .

## Příklad

Rozhodněte o konvergenci

$$\int_1^\infty \frac{x^2}{1+x^4} dx$$

# Nevlastní integrál

**Definice** (nevlastní integrál vlivem funkce)

Předpokládáme, že funkce  $f$ , definovaná na intervalu  $[a, b)$ , je neomezená v okolí meze  $b$  a integrovatelná na každém intervalu  $[a, r]$ , kde  $r < b$ , potom definujeme **nevlastní integrál neomezené funkce  $f$  na intervalu  $[a, b]$**  jako limitu

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{r \rightarrow b^-} \int_a^r f(x) dx .$$

Je-li tato limita reálné číslo, říkáme, že **nevlastní integrál konverguje** (k tomuto číslu). Jestliže limita neexistuje, nebo je  $\pm\infty$ , říkáme, že **nevlastní integrál diverguje**.

Analogicky definujeme nevlastní integrál funkce  $f$  neomezené v okolí dolní meze  $a$  jako limitu

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{r \rightarrow a^+} \int_r^b f(x) dx .$$

# Nevlastní integrál

Jestliže je funkce  $f$  neomezená v okolí bodu  $c$  ležícího uvnitř intervalu  $[a, b]$  a je v částečných intervalech  $[a, c)$ ,  $(c, b]$  integrovatelná, vyjádříme nevlastní integrál  $\int_a^b f(x) dx$  ve tvaru součtu

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx .$$

Jeho konvergence je podmíněna konvergencí obou nevlastních integrálů na pravé straně.

# Nevlastní integrál

## Příklad

Vypočítejte nevlastní integrál

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

## Příklad

Vypočítejte nevlastní integrál

$$\int_0^2 \frac{1}{2-x} dx$$

## Poznámka

Podobně jako u nevlastního integrálu vlivem meze je i zde možno považovat za obsah ohraničeného obrazce (grafem  $f$ , osou  $x$  a přímkami  $x = a$ ,  $x = b$ ).

Platí zde analogie srovnávacího kriteria pro určení konvergence nevlastního integrálu.