Zpracování výsledků měření

- **Aritmetický průměr**

$$X = \left(\overline{X} \pm t_{P,n} \cdot \sigma_{\overline{X}}\right) \quad \Leftarrow \quad \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}, \qquad \sigma_{\overline{X}} = \sqrt{\frac{1}{N \cdot (N-1)} \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \overline{X}\right)^2},$$

kde $t_{P,n}$ je *Studentův součinitel* a součin $t_{P,n} \cdot \sigma_{\overline{X}}$ je *krajní chyba* (pro P ≥ 95%).

EXCEL: funkce **PRŮMĚR()**
EXCEL: vzorec s funkcemi **SMODCH(…)/ODMOCNINA(POČET(…)-1)**
EXCEL: funkce **TINV(1-P/100;n-1)**

- **Zákon hromadění chyb (kvadratický)**

  - kromě krajní chyby $t_{P,n} \cdot \sigma_{\overline{X}}$ musíme započítat i další chyby, např. chybu měřidla σ_m, chybu odečtu ze stupnice $\sigma_{čtení}$
  - celková chyba určení veličiny X je pak: $\sigma_X = \sqrt{\left(t_{P,n} \cdot \sigma_{\overline{X}}\right)^2 + \left(\sigma_m\right)^2 + \left(\sigma_{čtení}\right)^2}$

- **Zápis výsledků**

  - vždy ve tvaru $X = \left(\overline{X} \pm \sigma_X\right)$
  - hodnotu chyby σ_X zaokrouhlujeme na **jednu platnou číslici**,
  - hodnotu veličiny $\overline{X}$ zaokrouhlujeme na stejný počet desetinných (desítkových) míst jako má zaokrouhlená chyba σ_X.

Zpracování výsledků měření

- **Chyba nepřímého měření**

- jsou-li hodnoty veličin q_1, q_2, …q_n naměřeny s odchylkami σ_{q1}, σ_{q2}, …σ_{qn} a funkce $f(q_1, q_2, \ldots q_n)$ je funkcí těchto veličin, potom chyba stanovení funkce f se určí jako:

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\cdot\sigma_{q1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial q_2}\cdot\sigma_{q2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial q_n}\cdot\sigma_{qn}\right)^2}$$

- odchylky σ_{q1}, σ_{q2}, …σ_{qn} přitom musí být náhodné a nezávislé.

- **Vážený průměr** $X = \left(X_{best} \pm \sigma_{X_{best}}\right)$

- máme-li veličinu změřenou několika na sobě nezávislými způsoby, různými experimentálními skupinami, s různými přístroji atd.

$$X_1 \pm \sigma_{X_1},\ X_2 \pm \sigma_{X_2},\ \ldots\ X_N \pm \sigma_{X_N}$$

- pak můžeme pro nejlepší odhad založený na těchto hodnotách použít tzv. *vážený průměr*:

$$X_{best} = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i},$$

kde w_i jsou váhy jednotlivých výchozích hodnot X_i a platí pro ně:

$$w_i = \left(\frac{1}{\sigma_{X_i}}\right)^2$$

- pro výslednou chybu váženého průměru pak platí:

$$\sigma_{X_{best}} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{N} w_i}}$$

Zpracování výsledků měření

- **Lineární regrese (metoda nejmenších čtverců)**

- předpokládáme, že naměřené hodnoty $[x_i, y_i]$ leží na přímce, která je určena rovnicí: $\mathbf{y = k \cdot x + q}$
- hledáme takové koeficienty *k*, *q*, aby byl výraz $\sum (k \cdot x_i + q - y_i)^2$ minimální
- dostaneme:

$$k = \frac{N \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)}{N \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

$$q = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right)}{N \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

- pro odchylku těchto koeficientů platí vztahy:

$$S_0 = \left(\sum_{i=1}^{N} y_i^2\right) - \frac{1}{N} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)^2 - k \cdot \left[\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \frac{1}{N} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)\right]$$

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{S_0}{(N-2) \cdot \left[\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2\right]}}$$

$$\sigma_q = \sqrt{\frac{S_0 \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2}{(N-2) \cdot \left[\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2\right]}}$$

- kontrola lineárního průběhu » spočítání *regresního koeficientu* r_{xy} ($|r_{xy}| \approx 1$):

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2}}, \text{ kde } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \quad \text{a} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N}$$

- metoda je velmi citlivá, proto je nutné **nezaokrouhlovat!!**, ale počítat s co největším počtem míst.

EXCEL: funkce **LINREGRESE()**
*Stisknout **F2** a potom **CTRL+SHIFT+ENTER***

Zpracování výsledků měření

- lineární regrese je použitelná i pro funkce s nelineárním průběhem, jestliže lze tyto funkce linearizovat (logaritmováním, vhodnou substitucí …)