4 PRAVDĚPODOBNOST – 1. ČÁST

Pravděpodobnost:

- matematická disciplína, která se zabývá studiem zákonitostí, jimiž se řídí hromadné náhodné jevy
- vytváří pravděpodobnostní modely, pomocí nichž se snaží postihnout procesy, ovlivněné náhodou.

Náhodné pokusy: procesy, jejichž výsledek nelze předem jednoznačně určit (je nejistý); závisí jednak na daných podmínkách, při kterých je prováděn, jednak na náhodě. Teorie pravděpodobnosti se zabývá pouze náhodnými pokusy, které jsou za stejných podmínek opakovatelné a u nichž je variabilita výsledků podstatná a vykazuje určitou zákonitost.

Hromadné náhodné jevy: výsledky opakovatelných náhodných pokusů (symbolické značení – *A, B, C, …*).

Pravděpodobnost náhodného jevu: pravděpodobnost náhodného jevu A je číslo $P(A)$, které lze interpretovat jako míru možnosti nastoupení náhodného jevu.

Axiomatická teorie pravděpodobnosti: pravděpodobnost je funkce, která každému náhodnému jevu přiřazuje reálné číslo, přičemž musí být splněny základní axiomy.

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(A_1 \cup A_2 \cup ...) = P(A_1) + P(A_2) + ...$ (pro neslučitelné jevy)
3. $P(E) = 1$.

Klasická definice pravděpodobnosti: pravděpodobnost jevu A se rovná podílu případů příznivých nastoupení jevu A a počtu všech případů možných, jsou-li všechny stejně pravděpodobné.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

kde m je počet případů příznivých
n je počet případů možných.

Statistická definice pravděpodobnosti: pokud platí, že při rostoucím počtu opakování náhodného pokusu (n) kolísá relativní četnost $\frac{m}{n}$ ve stále užších mezích kolem určitého čísla, můžeme toto číslo považovat za pravděpodobnost jevu A.

relativní četnost jevu $A = \frac{m}{n}$

kde m je počet nastoupení jevu A
n je počet opakování pokusu.

- pravděpodobnosti náhodného jevu odhadujeme na základě výsledků, získaných při mnohonásobném opakování náhodného pokusu (aposteriorní charakter definice).

Pravidla pro počítání s pravděpodobnostmi

Podmíněná pravděpodobnost: $P(A/B)$ je podmíněná pravděpodobnost jevu A vzhledem k jevu B, tj. pravděpodobnost nastoupení jevu A za předpokladu, že nastal jev B.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ pro } P(B) > 0$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ pro } P(A) > 0$$

Pravidlo o násobení pravděpodobností:
Pravděpodobnost současného nastoupení jevů A a B (tzn. jejich průniku) je rovna součinu nepodmíněné pravděpodobnosti jednoho jevu a podmíněné pravděpodobnosti druhého jevu vzhledem k prvnímu jevu.

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Zobecnění pravidla o násobení pravděpodobností pro dva a více jevů:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Nezávislost jevů:
Jestliže $P(A/B) = P(A)$, pak jev A nezávisí na jevu B.
Jestliže $P(B/A) = P(B)$, pak jev B nezávisí na jevu A.

Nutná a postačující podmínka nezávislosti dvou jevů: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Zjednodušení pravidla o násobení pravděpodobností pro nezávislé jevy:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Pravidlo pro sčítání pravděpodobností:
Pravděpodobnost sjednocení jevů A a B je rovna součtu pravděpodobností těchto jevů, zmenšené o pravděpodobnost jejich průniku.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Disjunktní jevy: Jestliže $P(A \cap B) = 0$, pak jevy A a B jsou disjunktní.

Zjednodušení pravidla pro sčítání pravděpodobností pro disjunktní jevy:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Operace s náhodnými jevy

- vztahy mezi náhodnými jevy graficky znázorňují tzv. ***Vennovy diagramy***.

1. $\boldsymbol{A \subset B}$
Jev A je částí jevu B; z jevu A plyne jev B (implikace); nastoupení jevu A má vždy za následek nastoupení jevu B.

2. $\boldsymbol{A = B}$
Jevy A a B jsou si rovny; $A \subset B$ a současně $B \subset A$.

3. $\boldsymbol{C = A \cap B}$
Jev C je průnik jevů A a B (logický součin); jev C nastane právě tehdy, nastane-li současně jev A i jev B.

4. $\boldsymbol{C = A \cup B}$
Jev C je sjednocení jevů A a B (logický součet); jev C nastane právě tehdy, nastane-li alespoň jeden z jevů A a B.

5. $\boldsymbol{C = A - B}$
Jev C je rozdíl jevů A a B; jev C nastane právě tehdy, když jev A nastane a současně jev B nenastane.

6. $\boldsymbol{E}$ je jev jistý, tj. jev, který musí nastat vždy.
$\emptyset$ je jev nemožný, tj. jev, který nastat nemůže.

Kombinatorika

Permutace

$$P(n) = n!$$

Variace bez opakování

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Variace s opakováním

$$V_k'(n) = n^k$$

Kombinace

$$C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$