

## Trendová analýza - funkce nelineární v parametrech

### Zadání příkladu:

Odhadněte parametry exponenciálního trendu

$$T_t = \alpha_0 \cdot \alpha_1^t \quad (1)$$

u časové řady středního počtu obyvatelstva České republiky (ozn.  $P(t)$ ) od roku 1999 do roku 2008. Dále odhadněte pomocí tohoto modelu počet obyvatel v roce 2009 a 2010. Hodnoty  $P(t)$  jsou uvedeny v tabulce 1.

Tab. 1 - Počet obyvatel ČR letech 1999-2008 v tisících - ozn.  $P_t$

Rok	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
$P_t$	10283	10272	10224	10201	10202	10207	10234	10267	10313	10430

Zdroj dat: Český statistický úřad (ČSÚ)

### Vypracování příkladu

Lineární a kvadratický model z tématu 10 jsou modely tzv. **lineární v parametrech**. Platí pro ně, že se dají převést na vícerozměrný lineární model. Zde uvedený model lineární v parametrech není. Ale je možné ho pomocí jednoduché transformace na takový model převést.

#### Transformace modelu

1. krok - obě strany rovnice (1) zlogaritmujeme.

$$\ln T_t = \ln(\alpha_0 \cdot \alpha_1^t)$$

2. krok - upravíme pravou stranu

$$\ln T_t = \ln(\alpha_0) + t \cdot \ln(\alpha_1)$$

3. krok - provedeme substituci  $Z_t = \ln T_t$ ,  $\beta_0 = \ln \alpha_0$ ,  $\beta_1 = \ln \alpha_1$  a dostaneme model

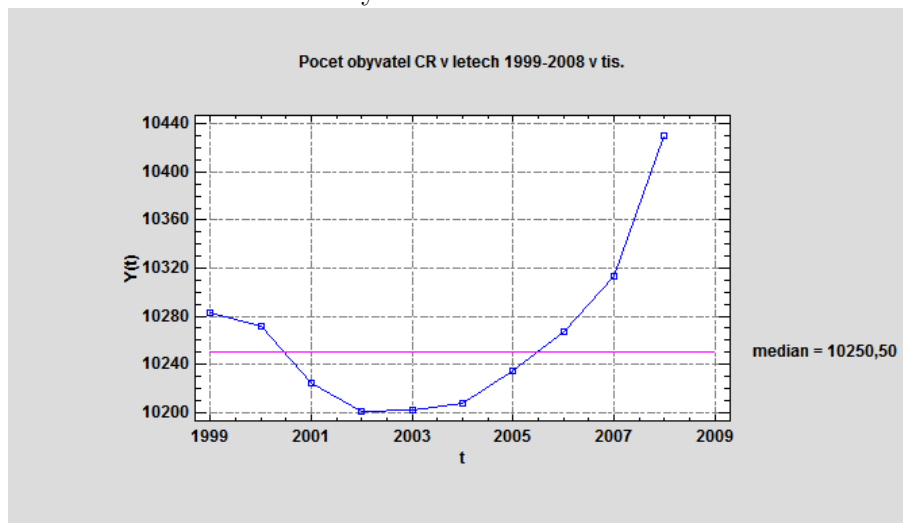
$$Z_t = \beta_0 + \beta_1 t$$

který je lineární. Výpočet odhadů jeho parametrů jsou uvedeny například tématu 10, příklad 1.

#### Program STATGRAPHICS Centurion XVII

V programu STATGRAPHICS je pro analýzu trendu ČR vytvořena funkcionální menu *Forecast/User-Specified Model*. Do povinného pole **Data** je třeba zadat **přirozený logaritmus** proměnné, kde jsou hodnoty sledované veličiny  $y_t$ . Syntaxe operátoru je  $\text{Log}(\text{proměnná})$ . Do nepovinného pole (**Time Indices:**) je možné zadat odpovídající hodnoty času. Po kliknutí na tlačítko OK se objeví další formulář *Model Specification Options*. Zde v rámci *Type* zvolíme **Linear Trend** a klikneme na tlačítko OK. V dalším formuláři *Tables and Graphs* přidáme tabulku *Forecast Table* a potvrdíme tlačítkem OK.

Obrázek 1: Počet obyvatel ČR v letech 1999-2008 v tis.



Zdroj: Údaje ČSÚ, vlastní zpracování

Výsledky:

Lineární trend

Odhady parametrů:  $b_0 = 9,23$ ,  $b_1 = 0,0011$ . Nyní je potřeba spočítat hodnoty  $a_0$  a  $a_1$  ze substituce ve 3. kroku transformace. Platí:  $a_0 = e^{b_0}$  a  $a_1 = e^{b_1}$ . Dostaneme  $a_0 \doteq 10199,36$  a  $a_1 \doteq 1,0011$ . Model má potom tvar

$$T_t = 10199,36 \cdot 1,0011^t \quad (2)$$

Nyní je nutné zkontrolovat, zdali jsou parametry modelu statisticky významné. V rámu *Analysis Summary* jsou v tabulce **Trend Model Summary** uvedeny odhady všech parametrů a příslušné hodnoty **P-value**. Pokud je hodnota P-value pro daný parametr nižší než zvolená hladina významnosti  $\alpha$  (ta bude vždy 5 %, pokud nebude stanoveno jinak), je daný parametr statisticky významný (nelze přijmout hypotézu, že je roven nule). Zde je  $P\text{-value}(a_0) = 0,00$ ,  $P\text{-value}(a_1) = 0,136$ . Významný je proto pouze první parametr. Takže exponenciální trend tato veličina nemá.

Výpočet předpovědí počtu obyvatel zde proto nyní uvedeme pouze pro ilustraci postupu. Předpovědi vzhledem ke statisticky nevýznamnému parametru  $\alpha_1$  nemají prakticky smysl. provést tak, že do vypočteného modelu (2) dosadíme příslušnou hodnotu  $t$  a vypočteme  $\hat{Y}_t$ . Zde je  $t = 11$  pro rok 2009 a  $t = 12$  pro rok 2010, takže  $\hat{Y}_{11} = 10327$  a  $\hat{Y}_{12} = 10338$ . Ve STATGRAPHICS existuje ve výše zmíněné funkcionalitě *Forecast/User-Specified Model* tabulka **Forecast Table**, kde program vypočte předpověď pro libovolný časový okamžik. Požadovaný počet předpovědí lze nastavit ve formuláři *Forecasting* při zadávání proměnných pro analýzu (standardně 12).

## Interpretace výsledků

Výsledkem je exponenciální model (2). Testy významnosti regresních parametrů ukázaly, že parametr  $\alpha_1$  není statisticky významný. Významný je pouze druhý parametr  $\alpha_0$ . Z toho plyne, že zvolený model není pro zkoumanou veličinu vhodný. Předpovědi  $\hat{T}_t$  pro roky 2009 a 2010 jsou uvedeny pouze pro ilustraci jejich výpočtu.