

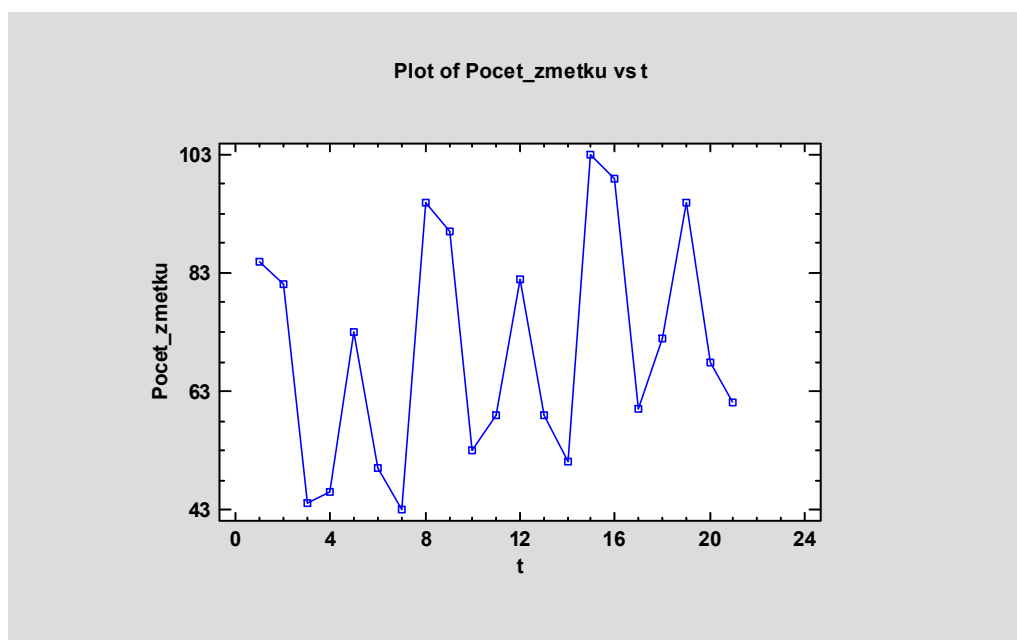
Popis sezónní složky – řešený příklad 2

Máme k dispozici údaje o počtu zmetků vyrobených v jednotlivých dnech ve třech po sobě jdoucích týdnech v podniku s nepřetržitým provozem. V této časové řadě byla prokázána existence sezónnosti. Kvantifikujte velikost sezónních výkyvů a očistěte od nich tuto časovou řadu.

Den	Týden		
	I	II	III
Pondělí	85	95	103
Úterý	81	90	99
Středa	44	53	60
Čtvrtek	46	59	72
Pátek	73	82	95
Sobota	50	59	68
Neděle	43	51	61

Řešení:

Pokud je v časové řadě prokázána existence sezónnosti, je potřeba nejprve zjistit, jaký má charakter, tedy zda je velikost sezónních výkyvů proporcionální složce trendové nebo zda je sezónní složka od trendu oddělena a velikost sezónních výkyvů je nezávislá na vývoji složky trendové. V tom nám může napomoci bodový diagram (Obr. 1).



Obrázek 1 – Vývoj ukazatele počet vyrobených zmetků v čase

Z Obr. 1 je patrné, že velikost sezónních výkyvů je proporcionální složce trendové, proto bychom k popisu sezónní složky použili model proporcionální sezónnosti, který je často označován také jako multiplikativní.

Multiplikativní model má tento tvar:

$$y_{ij} = T_{ij} \cdot S_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}$$

V teoretické stati o popisu sezónní složky je uvedeno, že kvantifikace sezónních výkyvů probíhá ve třech krocích:

1. Výpočet empirických sezónních indexů, tj. $I_j = \frac{y_{ij}}{\hat{T}_{ij}}$
2. Výpočet průměrných sezónních indexů.
3. Standardizace průměrných sezónních indexů, tj. výpočet indexních sezónních faktorů.

Abychom mohli provést první krok, je potřeba vypočítat trendové hodnoty. U časových řad, které jsou charakteristické velkými výkyvy v trendu, je vhodné použít k jejich vyrovnání klouzavé průměry. Vzhledem k tomu, že jde o časovou řadu periodickou, je potřeba stanovit rozsah klouzavé části období interpolace podle délky dané periody, zde tedy $m = 7$ (7 dní v týdnu). Tuto časovou řadu tedy vyrovnáme pomocí sedmičlenných prostých klouzavých průměrů. Výsledné hodnoty klouzavých průměrů uvedeme do Tab. 1. Ještě je potřeba určit, kolik hodnot časové řady počtu zmetků zůstane nevyrovnáno na jejím začátku a konci. Pokud m je 7, potom tedy $7 = 2p + 1$ a $p = 3$. Zůstane nevyrovnáno tedy celkem 6 hodnot, 3 na začátku časové řady a 3 na jejím konci. Hodnotu prvního sedmičlenného prostého klouzavého průměru dostaneme jako součet prvních 7 hodnot časové řady dělených jejich počtem:

$$\bar{y}_4 = \frac{85+81+44+46+73+50+43}{7} = 60,2857.$$

Další hodnotu dostaneme tak, že vynecháme nejstarší pozorování a naopak přidáme další novější, tj. hodnotu z pondělí druhého týdne:

$$\bar{y}_5 = \frac{81+44+46+73+50+43+95}{7} = 61,7143.$$

Obdobným způsobem dopočítáme zbývající hodnoty klouzavých průměrů.

Tabulka 1 – Hodnoty sedmičlenných prostých klouzavých průměrů

Týden	Den	Počet zmetků	\hat{T}_{ij}
I	Pondělí	85	•
	Úterý	81	•
	Středa	44	•
	Čtvrtek	46	60,2857
	Pátek	73	61,7143
	Sobota	50	63,0
	Neděle	43	64,2857
II	Pondělí	95	66,1429
	Úterý	90	67,4286
	Středa	53	68,7143
	Čtvrtek	59	69,8571
	Pátek	82	71,0
	Sobota	59	72,2857
	Neděle	51	73,2857
III	Pondělí	103	75,1429
	Úterý	99	77,0
	Středa	60	78,2857
	Čtvrtek	72	79,7143
	Pátek	95	•
	Sobota	68	•
	Neděle	61	•

Nyní již můžeme vypočítat empirické sezónní indexy a uvést je opět do tabulky – viz Tab. 2. První hodnota sezónního indexu je dána jako podíl 46/60,2857. Druhá jako 73/61,7143, třetí 50/63 atd.

Tabulka 2 – Hodnoty empirických sezónních indexů

Týden	Den	Počet zmetků	\hat{T}_{ij}	Sezónní indexy
I	Pondělí	85	•	•
	Úterý	81	•	•
	Středa	44	•	•
	Čtvrtek	46	60,2857	0,763033
	Pátek	73	61,7143	1,18287
	Sobota	50	63,0	0,793651
	Neděle	43	64,2857	0,668889
II	Pondělí	95	66,1429	1,436284
	Úterý	90	67,4286	1,334745
	Středa	53	68,7143	0,77131
	Čtvrtek	59	69,8571	0,844581
	Pátek	82	71,0	1,15493
	Sobota	59	72,2857	0,816206
	Neděle	51	73,2857	0,695907
III	Pondělí	103	75,1429	1,370722
	Úterý	99	77,0	1,285714
	Středa	60	78,2857	0,766423
	Čtvrtek	72	79,7143	0,903226
	Pátek	95	•	•
	Sobota	68	•	•
	Neděle	61	•	•

První tři a poslední tři hodnoty zůstanou neznámé, protože nemáme hodnoty klouzavých průměrů, se kterými bychom porovnávali napozorovaná data.

Dalším krokem má být výpočet průměrných sezónních indexů. Počítají se proto, že každé dílčí období v rámci roku, zde den, by mělo být zastoupeno jednou hodnotou, charakterizující velikost sezónního výkyvu. Zde však máme pro jednotlivé dny hodnoty dvě nebo i tři. Je proto potřeba určit jejich průměrnou hodnotu. Ta se vypočítá podle:

$$\bar{I}_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\frac{y_{ij}}{\hat{T}_{ij}} \right).$$

První hodnotu tak vypočítáme jako $\bar{I}_1 = \frac{1}{2}(1,436284 + 1,370722) = 1,403508$. Plyne to ze skutečnosti, že za pondělí máme celkem dvě hodnoty sezónních indexů. Další průměrný sezónní index (pro úterý) bude $\bar{I}_2 = \frac{1}{2}(1,334745 + 1,285714) = 1,3102295$. Třetí hodnota (pro středu) se vypočítá jako $\bar{I}_3 = \frac{1}{2}(0,77131 + 0,766423) = 0,7688665$, čtvrtá (pro čtvrtek) jako $\bar{I}_4 = \frac{1}{3}(0,763033 + 0,844581 + 0,903226) = 0,8369467$, pátá (pro pátek) $\bar{I}_5 = \frac{1}{2}(1,18287 + 1,15493) = 1,1689$. Obdobně spočítáme zbývající hodnoty pro sobotu a neděli, jak ukazuje Tab. 3.

Tabulka 3 – Hodnoty průměrných sezónních indexů

Den	\bar{I}_j
Pondělí	1,403508
Úterý	1,3102295
Středa	0,7688665
Čtvrtek	0,8369467
Pátek	1,1689
Sobota	0,804929
Neděle	0,682398
Součet	6,975778

Na sezónní indexy je obvykle kladena normalizační podmínka, která říká, že vliv sezónních faktorů by se měl v rámci periody vykompenzovat, proto by součet sezónních indexů, a tedy i průměrných sezónních indexů, měl být roven počtu sezón, zde tedy 7. V našem případě je však roven hodnotě 6,975778. Proto přistoupíme ke kroku třetímu, kdy uplatněním výše uvedené podmínky dostaneme hodnoty indexních sezónních faktorů. Jak tedy docílit toho, aby součet průměrných sezónních indexů byl roven 7? Abychom dostali v součtu hodnotu 7, je potřeba všechny hodnoty průměrných sezónních indexů vynásobit hodnotou, která je větší než 1 (nebudeme nic přičítat, ani odečítat, protože indexy jsou podílem dvou hodnot, proto když chceme hodnotu indexu zvětšit, vynásobíme ji číslem, které je větší než 1). Tuto hodnotu získáme jako podíl toho, co chceme dosáhnout a toho, co nám vyšlo, tj. $7 \div 6,975778 = 1,003472301$. Touto hodnotou nyní vynásobíme hodnoty všech průměrných sezónních indexů, a tím dostaneme hodnoty indexních sezónních faktorů – viz Tab. 4.

Tabulka 4 – Hodnoty indexních sezónních faktorů

Den	\bar{I}_j	Indexní sezónní faktory
Pondělí	1,403508	1,408381
Úterý	1,3102295	1,314779
Středa	0,7688665	0,771536
Čtvrtek	0,8369467	0,839853
Pátek	1,1689	1,172959
Sobota	0,804929	0,807724
Neděle	0,682398	0,684768
Součet	6,975778	7,000000

Indexní sezónní faktory představují finální vyčíslení velikosti sezónních výkyvů. Lze je také jednoduše interpretovat. První z nich říká, že v pondělí jsou hodnoty počtu vyrobených zmetků v průměru o 40,8 % nad dlouhodobým normálem. Naopak ve středu je počet vyrobených zmetků v průměru o 22,8 % pod dlouhodobým normálem.

Posledním úkolem je očistit časovou řadu od sezónních vlivů. To v případě multiplikativního modelu znamená, že původní hodnoty časové řady dělíme hodnotami příslušných sezónních faktorů. První očištěnou hodnotu získáme jako podíl 85 a sezónního indexního faktoru pro pondělí, tedy $85/1,408381 = 60,353$. Druhá hodnota pak bude $81/1,314779 = 61,607$. Další očištěné hodnoty jsou uvedeny v tabulce 5.

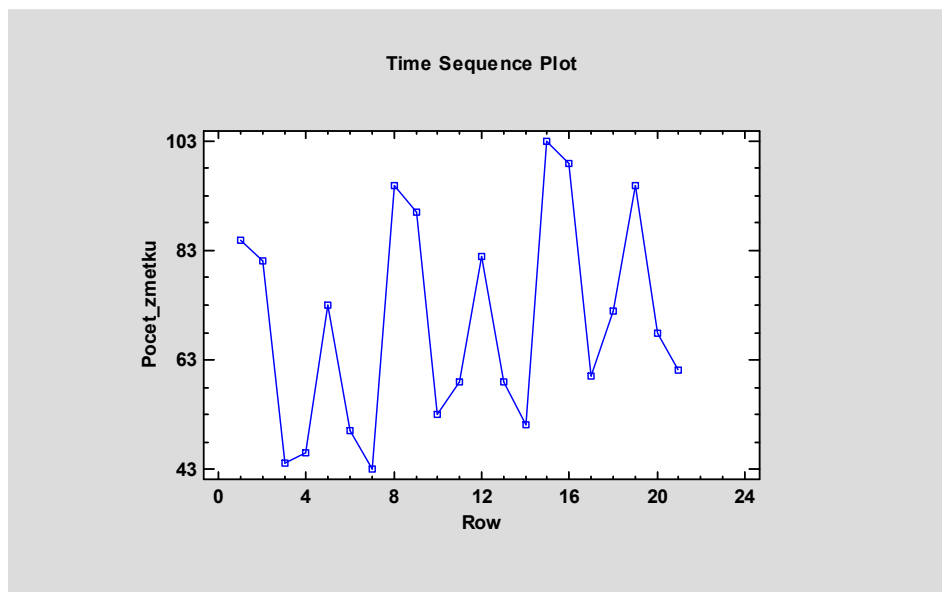
Tabulka 5 – Hodnoty časové řady očištěné od sezónních vlivů

Týden	Den	Počet zmetků	\hat{T}_{ij}	Sezónní indexy	Očištěné hodnoty
I	Pondělí	85	•	•	60,353
	Úterý	81	•	•	61,607
	Středa	44	•	•	57,029
	Čtvrtek	46	60,2857	0,763033	54,771
	Pátek	73	61,7143	1,18287	62,236
	Sobota	50	63,0	0,793651	61,902
	Neděle	43	64,2857	0,668889	62,795
II	Pondělí	95	66,1429	1,436284	67,453
	Úterý	90	67,4286	1,334745	68,453
	Středa	53	68,7143	0,77131	68,694
	Čtvrtek	59	69,8571	0,844581	70,250
	Pátek	82	71,0	1,15493	69,909
	Sobota	59	72,2857	0,816206	73,045
	Neděle	51	73,2857	0,695907	74,478
III	Pondělí	103	75,1429	1,370722	73,134
	Úterý	99	77,0	1,285714	75,298
	Středa	60	78,2857	0,766423	77,767
	Čtvrtek	72	79,7143	0,903226	85,729
	Pátek	95	•	•	80,992
	Sobota	68	•	•	84,187
	Neděle	61	•	•	89,081

Pro takto sezónně očištěnou časovou řadu je pak možné najít vhodnou trendovou funkci, kterou se očištěné údaje vyrovnají a vytvářet předpovědi budoucího vývoje prodloužením trendu do budoucnosti. Nesmíme však zapomenout, že když vytvoříme tímto způsobem předpověď na dalších několik dní, je vždy potřeba do časové řady sezónnost vrátit, tj. vytvořenou předpověď pro pondělí násobíme indexním sezónním faktorem pro pondělí atd.

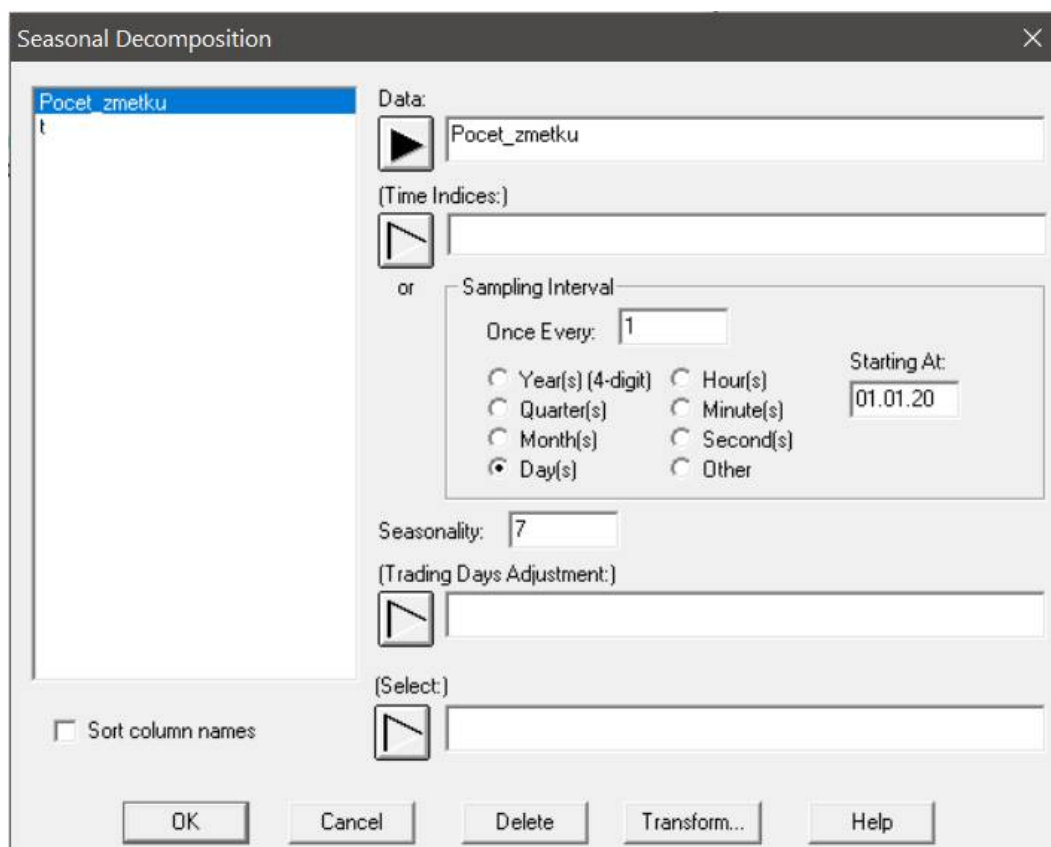
Řešení v SGP:

Do prvního sloupce datového listu zadáme hodnoty počtu vyrobených zmetků. Pokud se chceme podívat na „vzhled“ sezónních výkyvů, zvolíme posloupnost procedur **Plot – Scatterplots – X Plot ...** Do řádku *Data* vložíme hodnoty počtu zmetků a potvrdíme OK. Nabídku *Tables and Graphs* potvrdíme tlačítkem OK, jak je. Zajímá nás zde výstup *Time Sequence Plot* – viz Obr. 2. Zde vidíme podobu sezónních výkyvů.



Obrázek 2 – Grafické znázornění počtu krádeží vloupáním v Libereckém kraji

Pokud však chceme sezónní výkyvy kvantifikovat a očistit od nich časovou řadu, je potřeba zvolit **Describe – Time Series – Seasonal Decomposition ...** Do vstupního panelu do řádku *Data* zadáme proměnnou počet zmetků. Dále zaškrtneme v oddílu *Sampling Interval* položku *Days*. V oddílu *Starting At* nemusíme nic měnit. V oddílu *Seasonality* vyplníme hodnotu periody dané řady, tedy 7, a následně stiskneme tlačítko OK (Obr. 3).



Obrázek 3 – Vstupní panel Seasonal Decomposition

Objeví se před námi panel *Adjustment Options*, kde nic neměníme a potvrdíme jen OK. Potom se objeví nabídka *Tables and Graphs*, kde v tabulkových výstupech zaškrtneme ještě *Data Table* a v grafických *Seasonally Adjusted Data* – viz Obr. 4.



Obrázek 4 – Nabídka *Tables and Graphs* v proceduře *Seasonal Decomposition*

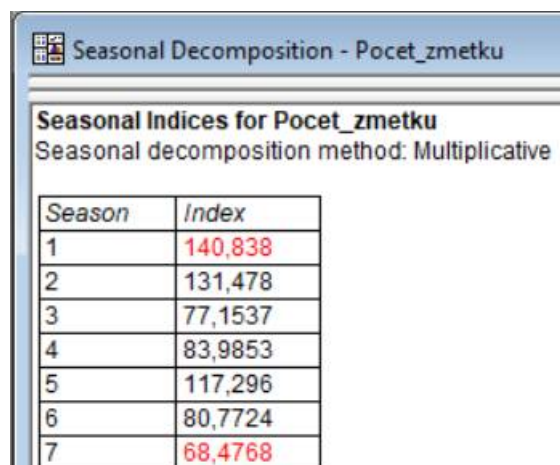
Nejprve se podíváme na výstup *Data Table*. Hned v úvodní části výstupu je uvedena informace „Seasonal Decomposition Method: Multiplicative“. Tato metoda nám vyhovuje, proto ji nemusíme měnit.

Seasonal Decomposition - Pocet_zmetku					
Data Table for Pocet_zmetku					
Seasonal decomposition method: Multiplicative					
Period	Data	Trend-Cycle	Seasonality	Irregular	Seasonally Adjusted
01.01.20	85,0				60,3531
02.01.20	81,0				61,6072
03.01.20	44,0				57,029
04.01.20	46,0	60,2857	76,3033	90,8531	54,7715
05.01.20	73,0	61,7143	118,287	100,845	62,2357
06.01.20	50,0	63,0	79,3651	98,2577	61,9024
07.01.20	43,0	64,2857	66,8889	97,6811	62,795
08.01.20	95,0	66,1429	143,629	101,981	67,4535
09.01.20	90,0	67,4286	133,475	101,519	68,4525
10.01.20	53,0	68,7143	77,131	99,9706	68,6941
11.01.20	59,0	69,8571	84,4581	100,563	70,2504
12.01.20	82,0	71,0	115,493	98,4629	69,9086
13.01.20	59,0	72,2857	81,6206	101,05	73,0448
14.01.20	51,0	73,2857	69,5906	101,627	74,4778
15.01.20	103,0	75,1429	137,072	97,3263	73,1338
16.01.20	99,0	77,0	128,571	97,7893	75,2977
17.01.20	60,0	78,2857	76,6423	99,3372	77,7669
18.01.20	72,0	79,7143	90,3226	107,546	85,7293
19.01.20	95,0				80,9917
20.01.20	68,0				84,1872
21.01.20	61,0				89,0813

Obrázek 5 – Výstup *Data Table* v *Seasonal Decomposition*

Ve výstupu na Obr. 5 je tabulka, kde v prvním sloupci je označení časové periody, ke které se vztahují údaje časové řady, které jsou ve druhém sloupci. Sloupec nazvaný *Trend-Cycle* obsahuje hodnoty sedmičlenných prostých klouzavých průměrů, kterými je vyrovnána časová řada počtu zmetků. Sloupec *Seasonality* obsahuje hodnoty sezónních indexů, tak jak jsme je při ručním výpočtu vypočítali v Tab. 2, v posledním sloupci. Ve sloupci *Irregular* jsou hodnoty náhodné složky a v posledním sloupci jsou sezónně očištěná data. Stejných hodnot jsme se dopočítali při ručním výpočtu v posledním sloupci Tab. 5.

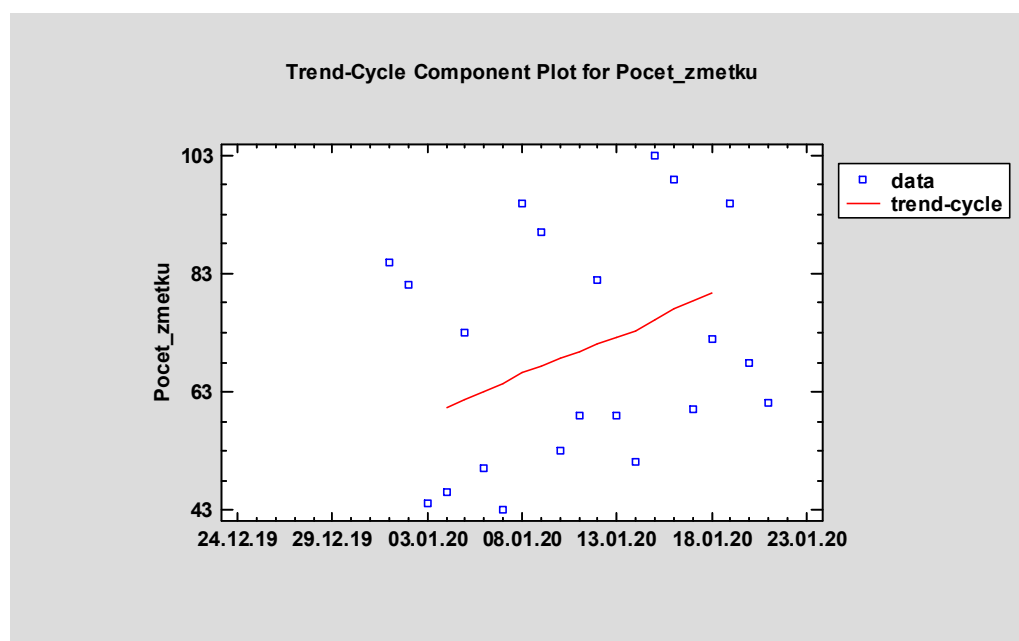
Hodnoty indexních sezónních faktorů pak najdeme v tabulkovém výstupu nazvaném *Seasonal Indices* – viz Obr. 6. Už jsou zde finální hodnoty, které vyčíslují velikost sezónních výkyvů, tj. indexní sezónní faktory, tak, jak jsme je ručně vypočítali v posledním sloupci tabulky 4 jen s tím rozdílem, že v programu SGP jsou tyto hodnoty vyjádřeny v procentech.



Season	Index
1	140,838
2	131,478
3	77,1537
4	83,9853
5	117,296
6	80,7724
7	68,4768

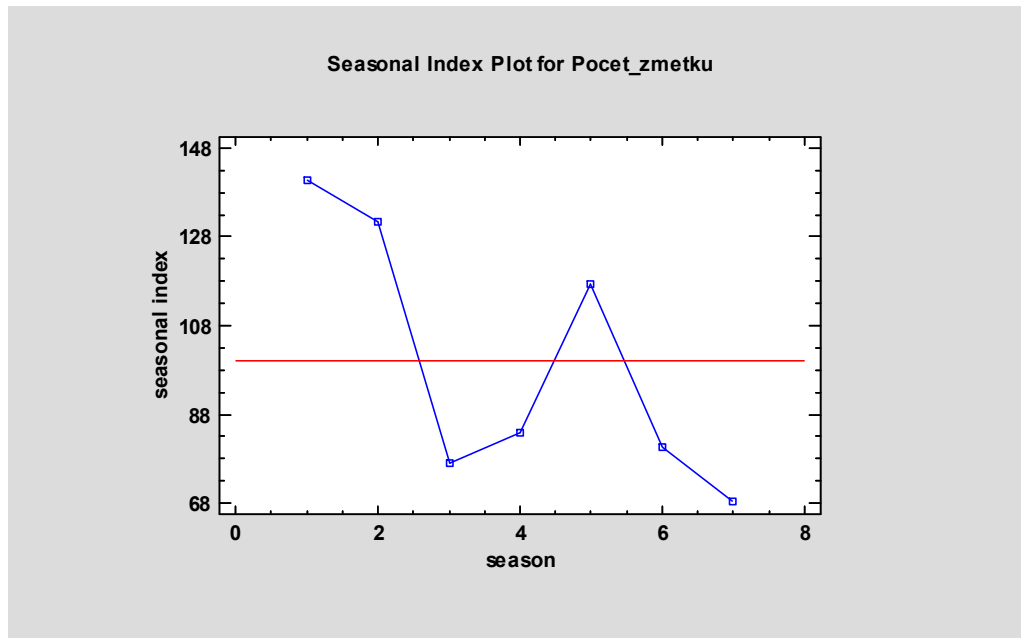
Obrázek 6 – Výstup Seasonal Indices v Seasonal Decomposition

Zajímavé jsou také grafické výstupy, kdy Obr. 7 ukazuje původní hodnoty a jejich vyrovnání pomocí sedmičlenných prostých klouzavých průměrů.



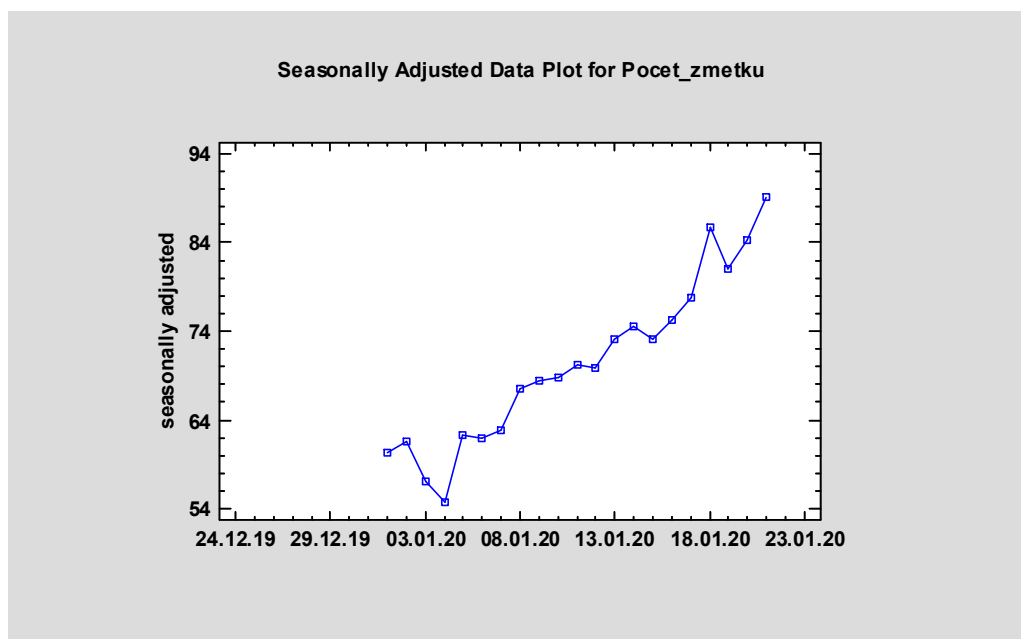
Obrázek 7 – Vyrovnání časové řady počtu zmetků pomocí sedmičlenných prostých klouzavých průměrů

Obr. 8 pak zachycuje grafické znázornění indexních sezónních faktorů. Je zde velmi přehledně zobrazeno, kdy jsou hodnoty časové řady v průměru pod dlouhodobým normálem (středa, čtvrtek, sobota, neděle) a kdy nad ním (pondělí, úterý, pátek).



Obrázek 8 – Indexní sezónní faktory

Poslední Obr. 9 ukazuje sezónně očištěná data, tj. jak by data o počtu zmetků vypadala, kdyby zde nepůsobily sezónní vlivy.



Obrázek 9 – Sezónně očištěná data počtu vyrobených zmetků