EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Rozvoj lidských zdrojů TUL pro zvyšování relevance, kvality a přístupu ke vzdělání v podmínkách Průmyslu 4.0

CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002329

ÚVOD DO MECHANIKY

Textilní technologie, materiály a nanomateriály

doc. Ing. Lukáš Čapek, Ph.D.

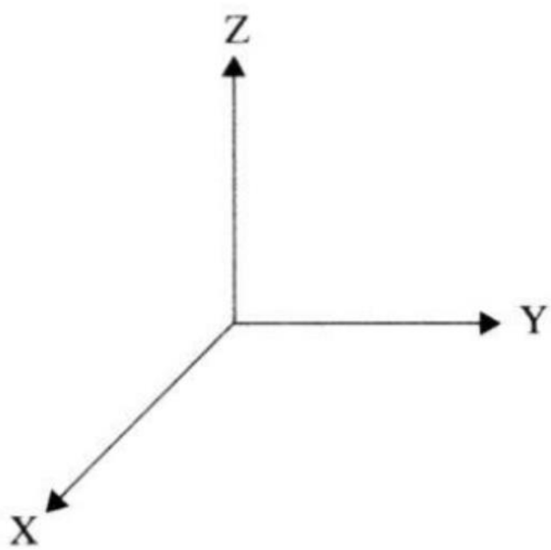
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
www.tul.cz

Podmínky zápočtu a zkoušky

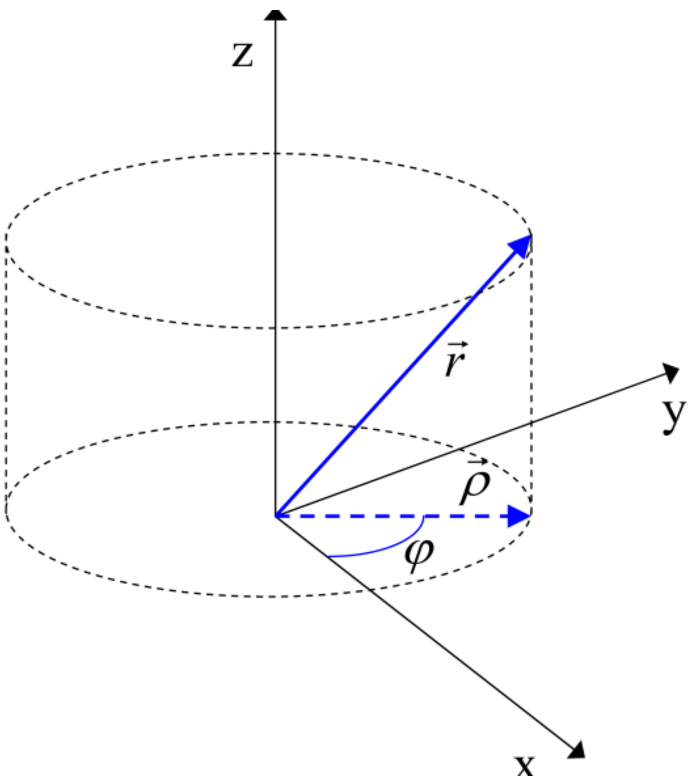
1) 2 x zápočtová písemka (5. a 10. týden) – zápočet

2) Písemná a ústní zkouška

Kartézská soustava souřadnic



Cylindrická soustava souřadnic



x=ρ cos (α)

y= ρ sin (α)

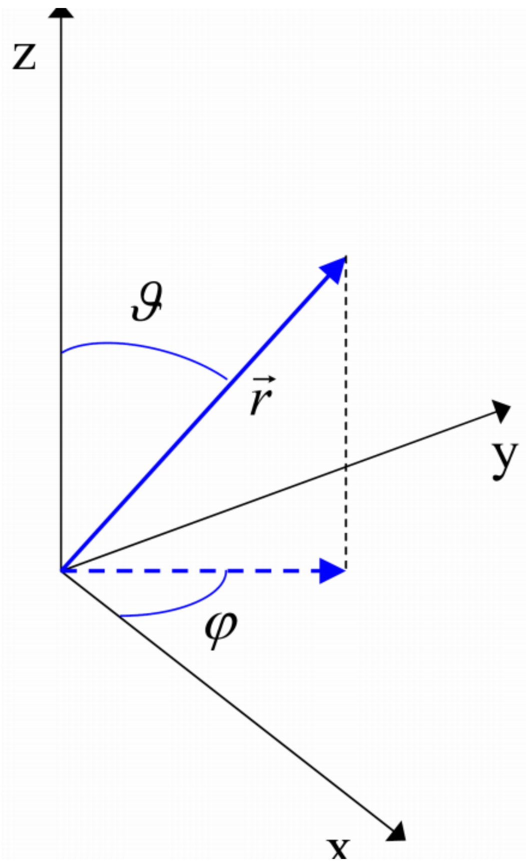
z = z

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$$

$$z = z$$

Sférická soustava souřadnic



x = r sinϑ cosφ
y = r sinϑ sinφ
z = r cosϑ

$$\rho = \sqrt{\mathrm{x}^2 + y^2 +}\, z^2$$

$$\vartheta = arccos \frac{\mathrm{z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\varphi = arccos \frac{\mathrm{z}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Fyzikální veličiny

1) Skaláry – dány jen velikostí

2) Vektory – dány velikostí a orientací

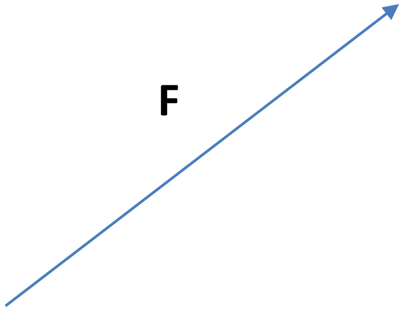
3) (Tenzory)

Vektory

1) Označení: **F (tučně)**, $\vec{F}$

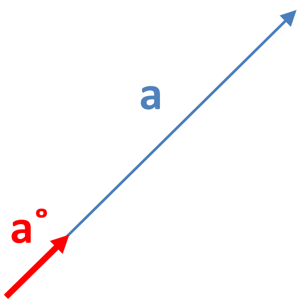
2) $\left|\vec{F}\right| = F = velikost\ vektoru$

3) Graficky = orientovaná úsečka

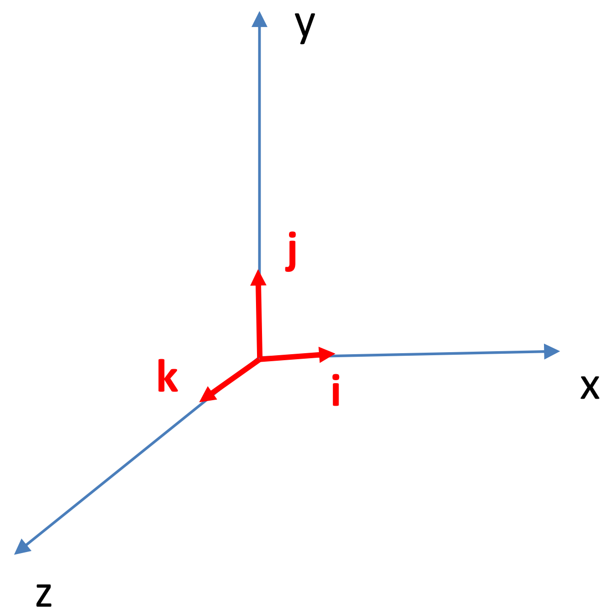


Jednotkové vektory

Jednotkový vektor: vektor jehož velikost = 1



a = **a°** a

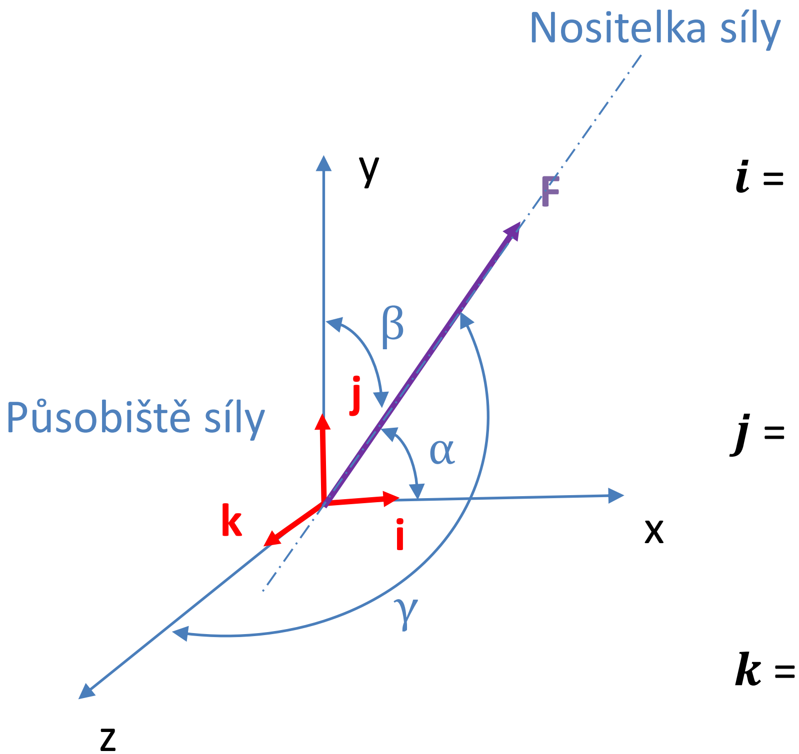


$$\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bázové vektory a vektor v prostoru



$$\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

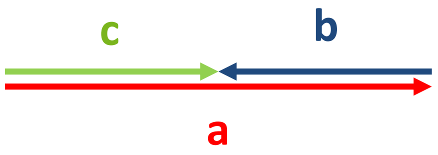
$$\vec{F} = F_x \vec{\imath} + F_y \vec{\jmath} + F_z \vec{k}$$

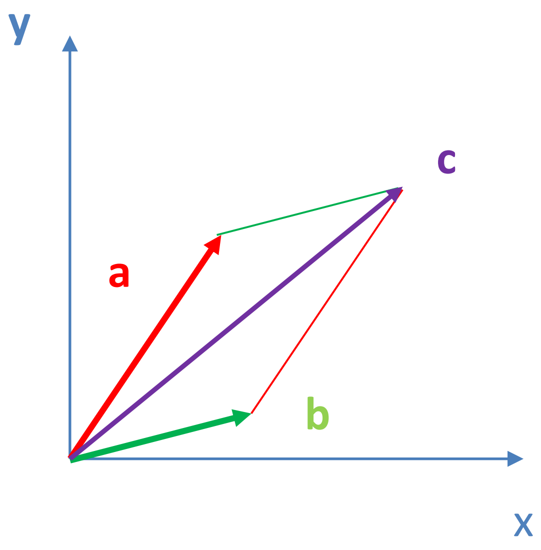
$$\vec{F} = \mathrm{F} \cos\alpha\, \vec{\mathrm{i}} + \mathrm{F} \cos\beta\, \vec{\mathrm{j}} + \mathrm{F} \cos\gamma\, \vec{\mathrm{k}}$$

Operace s vektory

Sčítání - graficky

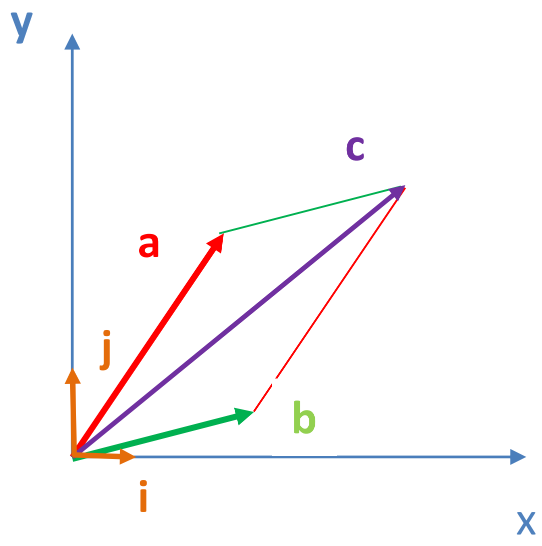
1. Měřítko – např. 10 mm odpovídá 10 N





Operace s vektory

Sčítání - početně



$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

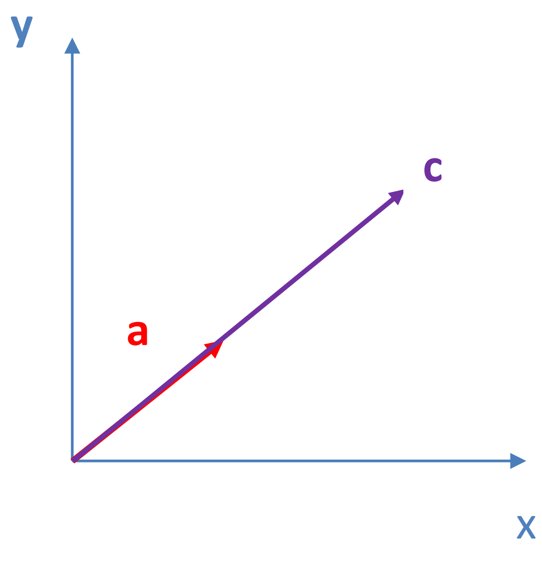
$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x+b_x)\ \mathbf{i} + (a_y+b_y)\ \mathbf{j}$

Operace s vektory

Násobení

1. Násobení vektoru skalární veličinou

$$\vec{c} = k \cdot \vec{a}$$



$$\vec{c} = \begin{pmatrix} k \cdot a_x \\ k \cdot a_y \\ \end{pmatrix}$$

$\mathbf{c} = k\, a_x\, \mathbf{i} + k\, a_y\, \mathbf{j}$

Operace s vektory

1) Skalární součin

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Operace s vektory

1) Skalární součin

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Pro dva nenulové vektory **a**, **b** v rovině nebo v prostoru a jejich odchylku ϕ platí:

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos \varphi, \ \varphi \in \langle 0°; 180° \rangle.$$

Operace s vektory

1) Vektorový součin

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Operace s vektory

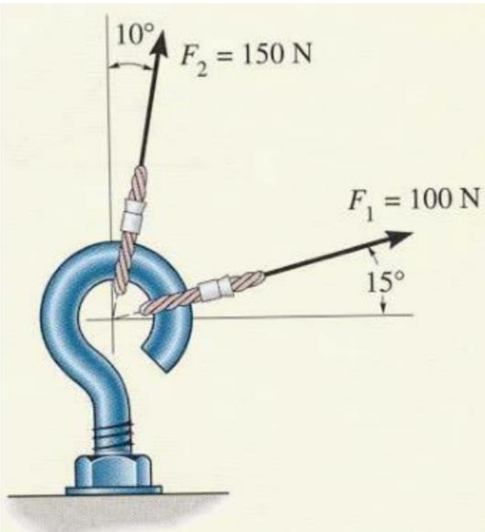
1) Vektorový součin

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

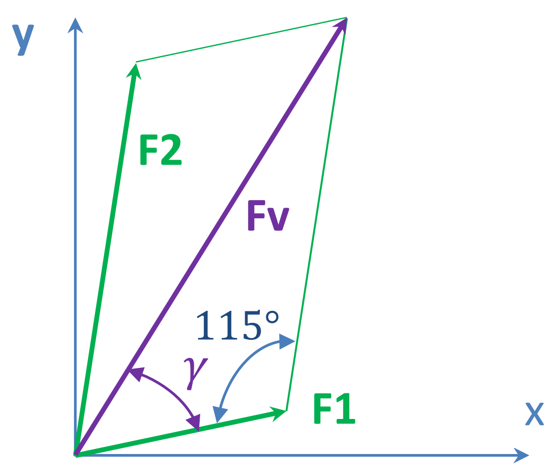
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

P1: Příklad na součet sil



Měřítko 1N≈10 mm



<u>Zadaní:</u>

Na kovový hák jsou přidělána dvě lana, která jsou zatížená soustavou sil **F1** a **F2**. Nalezněte výslednou sílu a její směr působení.

Početní řešení za použití kosinové věty a sinové věty:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

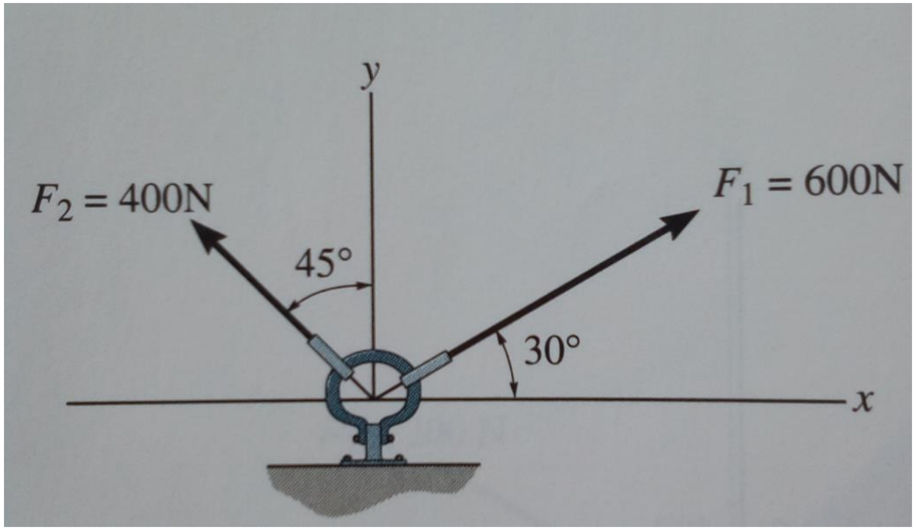
$$F_v = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(115°)}$$

$$\underline{F_v = 213\ N}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\underline{\gamma = 54.8°}$$

P2: Příklad na součet sil



Zadaní:

Na kovové oko jsou přidělána dvě lana, která jsou zatížená soustavou sil **F1** a **F2**. Nalezněte výslednou sílu a její směr působení.

Početní řešení provedeme následovně:

$\rightarrow x\colon\ F_{vx} = F_{1x} + F_{2x} =$ <u>236.8 N</u>

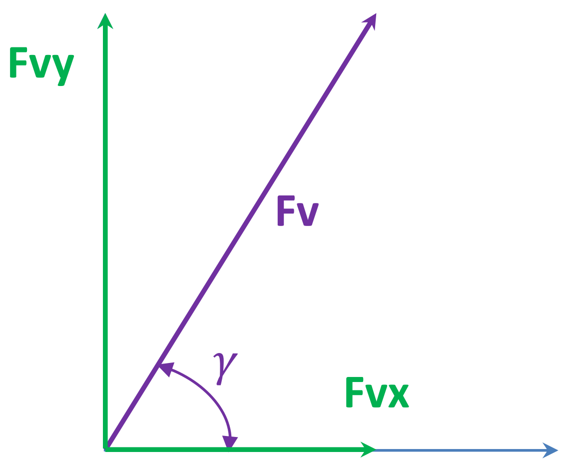
$\uparrow$ y: $F_{vy} = F_{1y} + F_{2y} =$ <u>582.8 N</u>

$$Fv = \sqrt{F_{vx}^2 + F_{vy}^2} = 629\ N$$

$$\tan(\gamma) = \frac{\text{Fvy}}{Fvx}$$

$$\underline{\gamma = 67.9\ °}$$

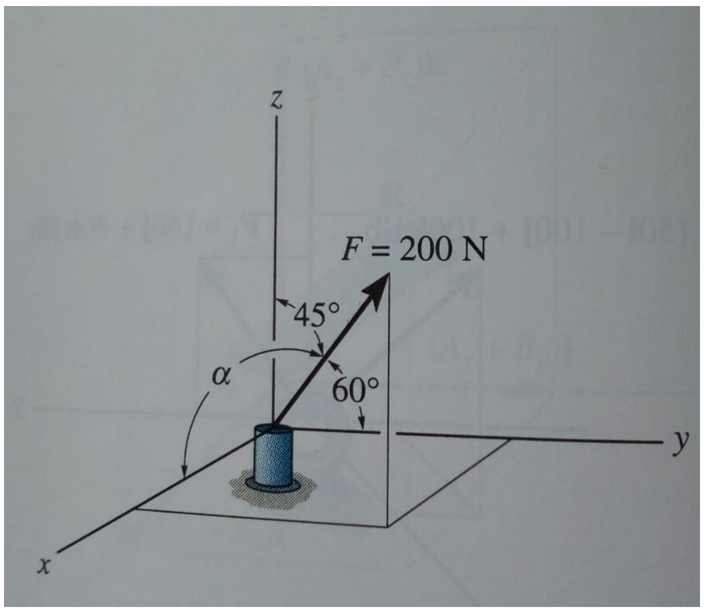
Měřítko 1N≈10 mm



P3: Příklad na součet sil

Zadaní:

Na kovový čep působí síla **F**. Určete úhel, který svírá s osou x.



Početní řešení:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\cos(\alpha) = \pm 0.5$$

$$\underline{\alpha = 60°\ nebo\ 120°}$$

$$\vec{F} = \mathrm{F}\cos\alpha\,\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{F}\cos\beta\,\vec{\mathrm{j}} + \mathrm{F}\cos\gamma\,\vec{\mathrm{k}}$$

$$\vec{F} = 100\,\vec{\mathrm{i}} + 100\,\vec{\mathrm{j}} + 141\,\vec{\mathrm{k}}\ (N)$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = 200\ N$$

Definice

Hmota

Základní filosofická kategorie, jejímž obsahem je objektivní realita jako protiklad vědomí člověka. Základními atributy existence hmoty jsou prostor, čas, pohyb. Konkretizací hmoty na strojírenské rozlišovací úrovni je hmotný objekt, který je účelově vymezen zájmem lidí z hlediska řešeného problému.

Těleso

Reálný objekt, jehož hmota je ve formě látky v tuhém skupenství. Na strojírenské rozlišovací úrovni je charakteristické těmito vlastnostmi: a) Tvoří celek - tím budeme rozumět, že každá část tělesa je současně vlastností celého tělesa. b) Je soudržné - to znamená, že oddělení části tělesa vyžaduje úsilí, které je nevratné. (Oddělení a opětovné připojení má za následek změnu vlastností) c) Je neprostupné - zaujímá-li těleso T prostorovou oblast, pak tuto oblast nemůže současně zaujímat jiné těleso T . d) Je vymezitelné údaji - o geometrii, materiálu, o vazbách a interakcích s okolím. e) Je deformovatelné - nastane-li interakce tělesa T s okolím, která je významná z hlediska mechanického pohybu, pak dochází vždy k deformaci tělesa.

Definice

Tuhé těleso

Ve statice je těleso možné považovat za tuhé, jestliže jeho deformace má zanedbatelný vliv na velikost reakčních sil ve vazbách tělesa s okolím.

Soustava těles

Je soubor těles, vázaných vazbami, které jsou významné z hlediska mechanického pohybu a tvoří celek.

Vazba

Vazba je spojení hmotných objektů, které umožňuje jejich interakci a je vymezeno veličinami.
a) <u>vazby silové</u> — které mechanický pohyb ovlivňují b) <u>vazby stykem</u> — které mechanický pohyb ovlivňují a omezují

Definice

Síla

Pojem síly vznikl abstrakcí subjektivního pocitu tlaku nebo tahu při vyvozování účinku člověkem na těleso. Jednotky síly je N.

Hmotný bod

Lze si jej představit jako malé tělísko, jehož rozměry jsou zanedbatelně malé vzhledem k trajektorii po které se pohybuje. Umisťujeme jej do středu hmotnosti těles.

Newtonovy pohybové zákony

Zákon setrvačnosti

Těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, dokud není nuceno vnějšími silami (někdy zde bývá udáváno působením jiného tělesa) svůj stav změnit.

Zákon síly

Síla působící na těleso je úměrná součinu jeho hmotnosti a zrychlení které mu uděluje.

Zákon akce a reakce

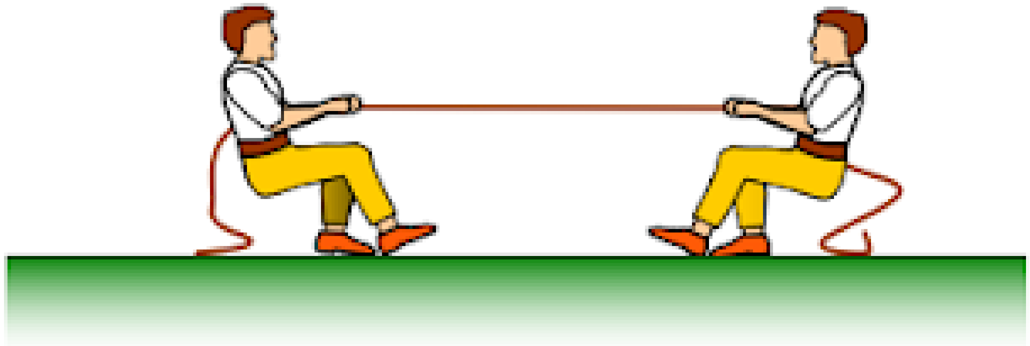
Každá akce vyvolává stejnou reakci opačného směru, aneb vzájemná silová působení dvou těles jsou stejně veliká a opačně orientovaná.

Silové soustavy

Při rozboru silových soustav a jejich účinků na tělesa se přitom zaměříme na tyto úlohy: a) **jaký má silová soustava účinek v daném bodě hmotného objektu a jak se dá co nejjednodušeji charakterizovat její silový účinek v daném bodě** b) jaké jsou podmínky ekvivalence silové soustavy s jinou silovou soustavou c) **za jakých podmínek zůstávají hmotné objekty při silovém působení ve stavu mechanického klidu (rovnováha).**

Rovnováha sil

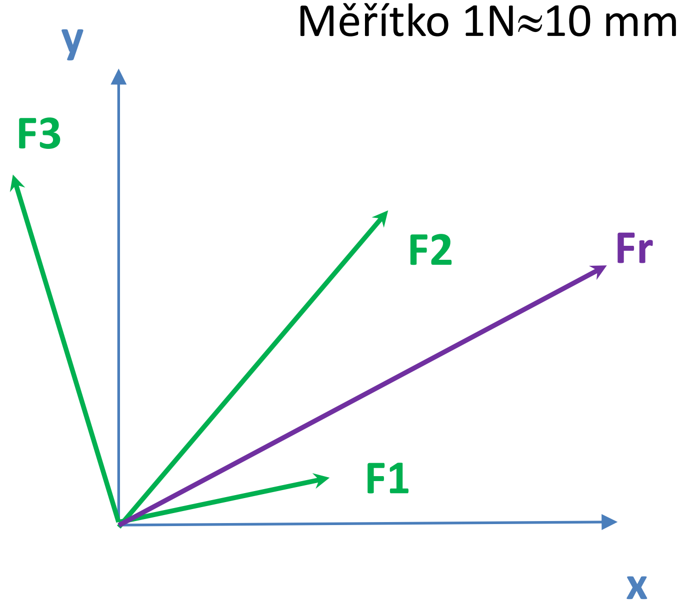
Soustava sil je v rovnováze pokud jejich výslednice je nulová. V grafickém řešení musí uzavírat silový mnohoúhelník.



$$\sum \vec{F_i} = \vec{0}$$

P4: Rovnováha sil

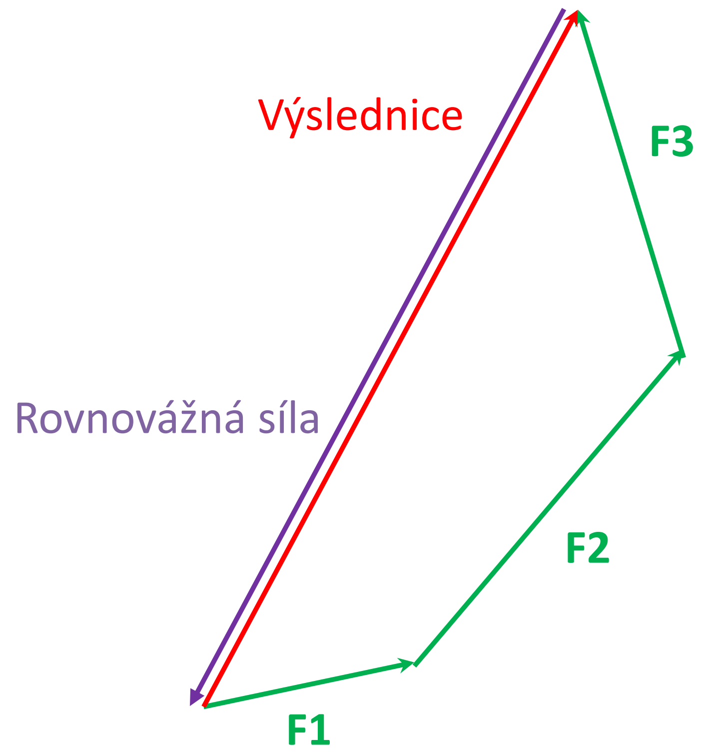
Měřítko 1N≈10 mm



$$\sum \vec{F_i} = \vec{0}$$

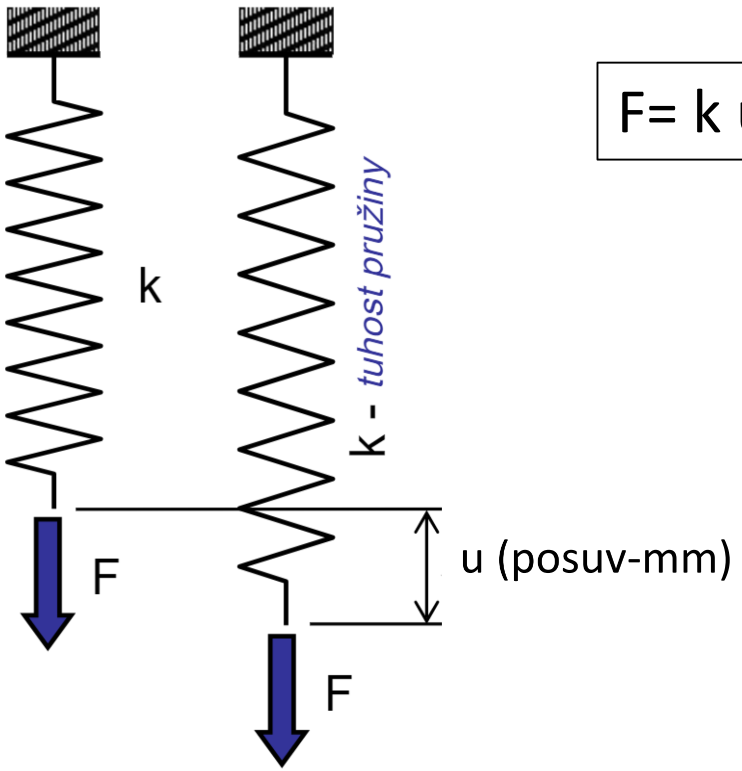
$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{Rx} = 0$$

$$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{Ry} = 0$$

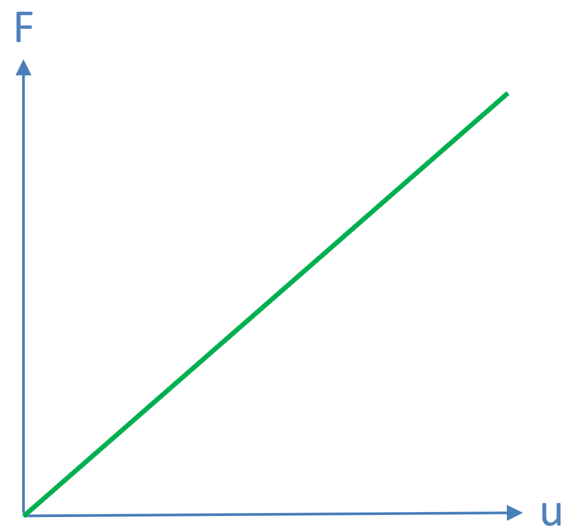


Rovnováha hmotného bodu

Síla v pružině

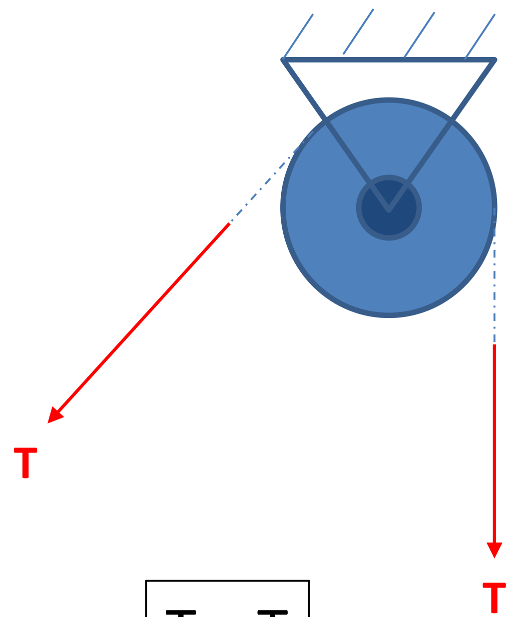


$F = k\,u$



Rovnováha hmotného bodu

Síla na kladce



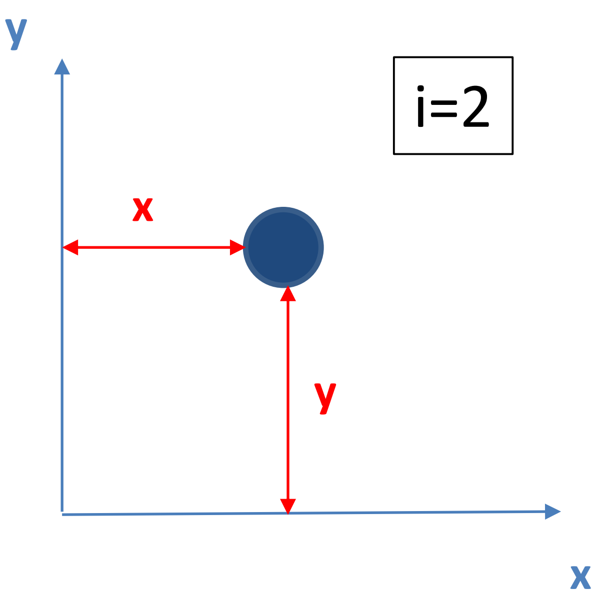
$$\boxed{T = T}$$

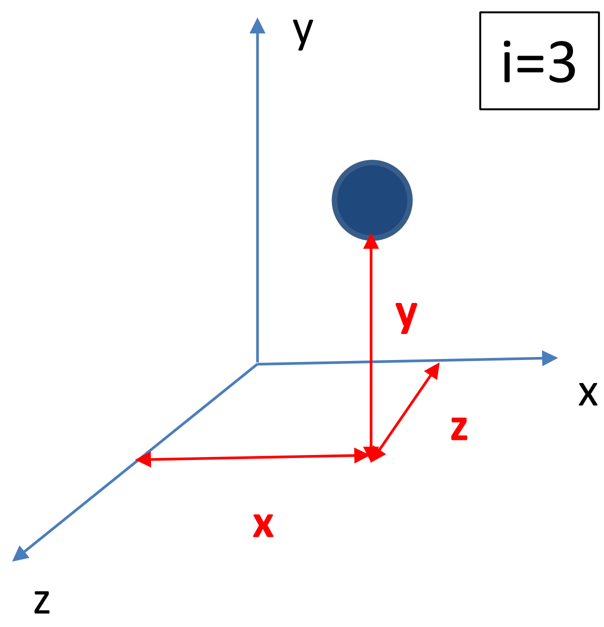
1) U lan zanedbáváme jejich tíhu
2) Lana přenáší pouze tahové síly
3) U kladek neuvažujeme tření
4) Síly umisťujeme do středu kladky

Rovnováha hmotného bodu

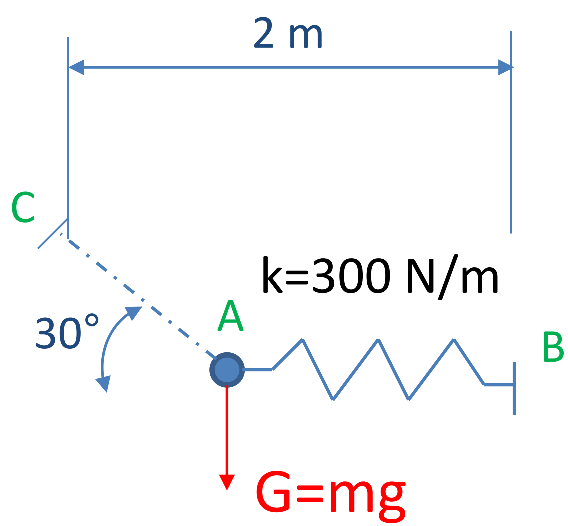
Stupeň volnosti hmotného bodu

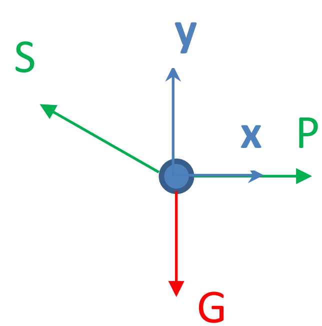
Počet nezávislých souřadnic (nemusí být kartézské), kterými **určíme** jednoznačně **polohu** nějakého mechanického **objektu**, nazýváme **počtem stupňů volnosti (i)** tohoto objektu.





P5:Rovnováha hmotného bodu





<u>Zadání:</u>

Stanovte posuv pružiny. Velikost závaží m=8 kg.

Nedeformovaná délka pružiny AB°=0.4 m. Tuhost

pružiny k=300 N/m. α=30°.

$$\sum \vec{F_i} = \vec{0}$$

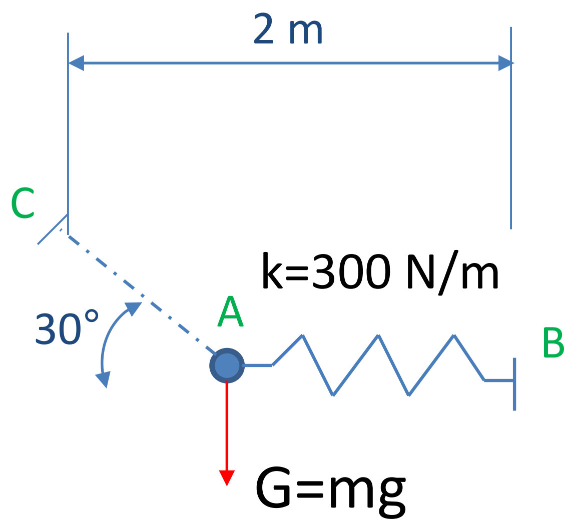
$$\sum F_x = 0 \qquad P - S \cdot \cos(\alpha) = 0$$

$$\underline{P = 136\ N}$$

$$\sum F_y = 0 \qquad -G + S \cdot \sin(\alpha) = 0$$

$$\underline{S = 157\ N}$$

P5:Rovnováha hmotného bodu



Zadání:

Stanovte posuv pružiny a konečnou délku pružiny.

Velikost závaží m=8 kg. Nedeformovaná délka pružiny AB=0.4 m. Tuhost pružiny k=300N/m. α=30°.

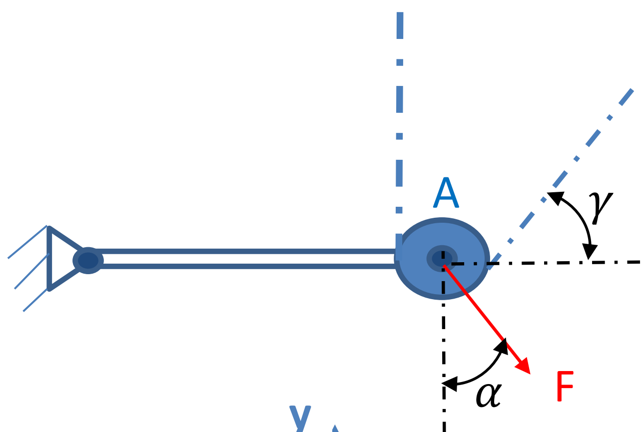
$$\underline{P = 136\,N}$$

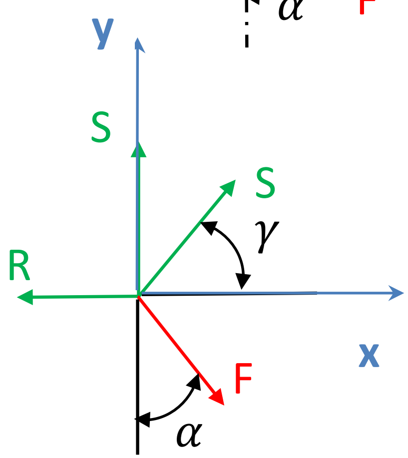
$$P = ku$$

$$u = \frac{P}{k} = 0.453\,m$$

$$l_{AB} = l_{AB}{^\circ} + u = 0.853\,m$$

P6:Rovnováha hmotného bodu





<u>Zadání:</u>

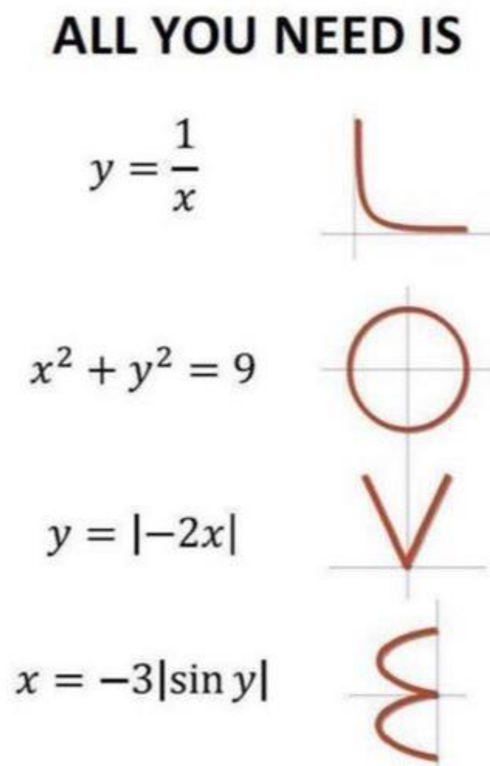
Na ramenu je přidělána kladka malých rozměrů. Kladka je napínána silou F. Přes kladku je převlečeno lano dle obrázku. Stanovte sílu v ramenu a lanech. Tření v kladce a hmotnost kladky zanedbáváme.

$$\sum \overrightarrow{F_i} = \vec{0}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad -R + F \cdot \sin(\alpha) + S \cdot cos(\gamma) = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad S + S \cdot \sin(\gamma) - F \cdot cos(\alpha) = 0$$

3 min pauza

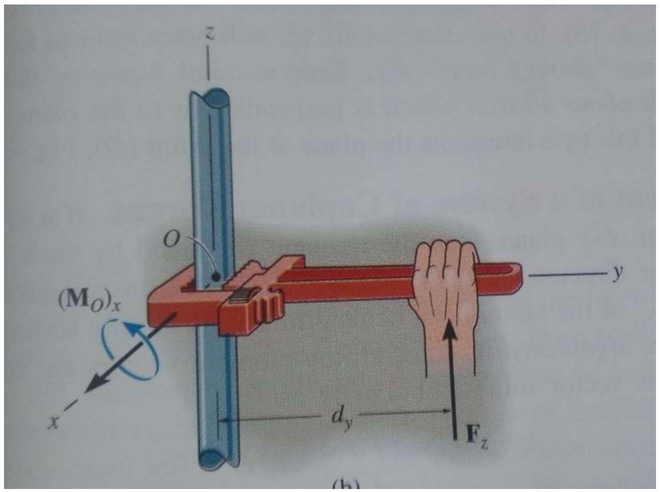


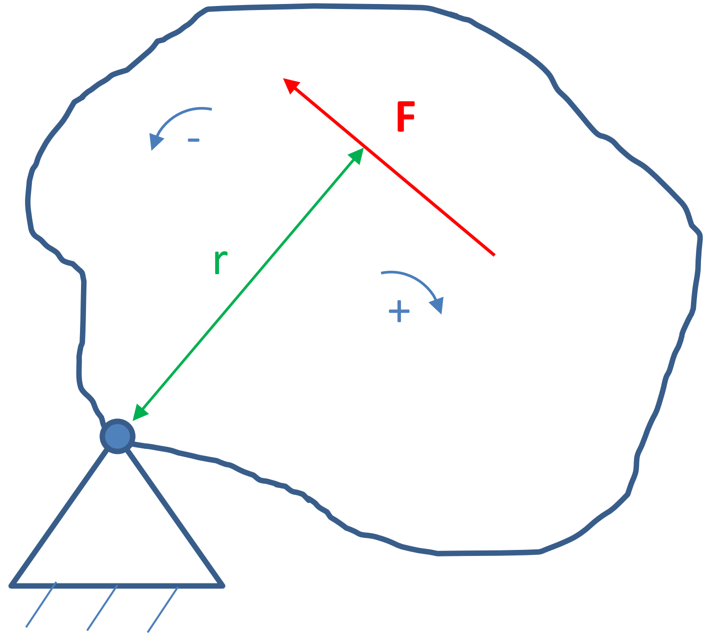
The Beatles - 1967

Zdroj: Twitter

Silová dvojice a její moment

Otáčivý účinek síly na tělese vyjadřujeme momentem síly

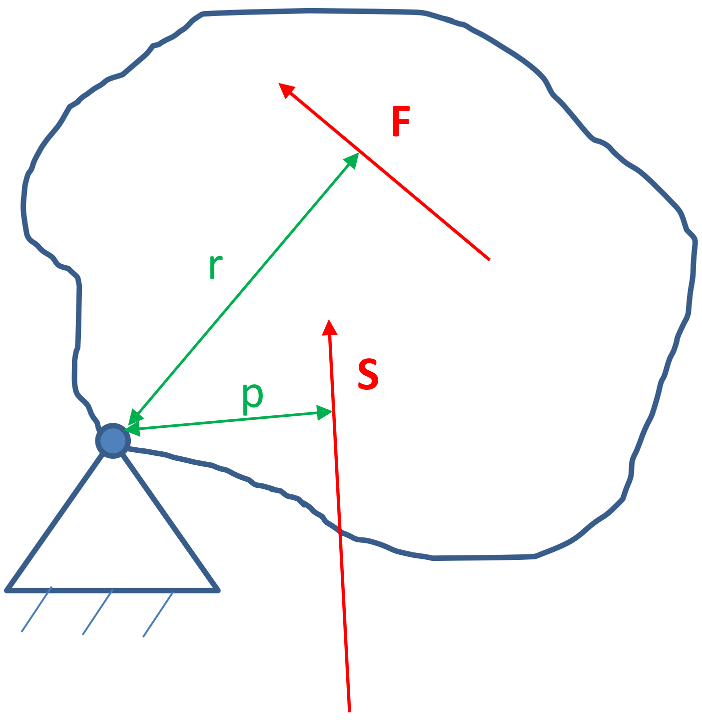




$$\boxed{M = F\ r\ [Nm]}$$

Silová dvojice a její moment

Redukce momentu

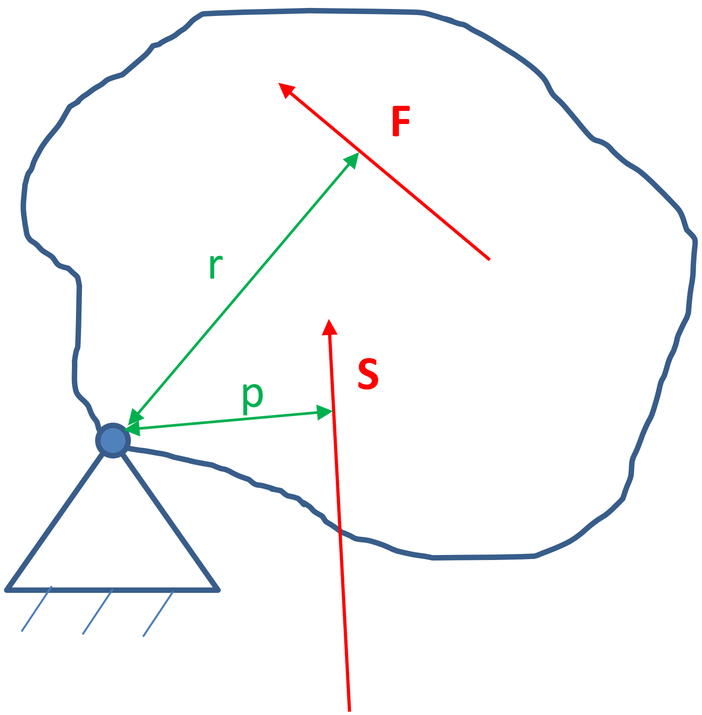


Nahrazení otáčivého účinku jedné síly stejným otáčivým účinkem jiné síly.

$$\boxed{\text{(M1)...} F\, r = S\, p \text{ ... (M2)}}$$

Silová dvojice a její moment

Výsledný otáčivý moment



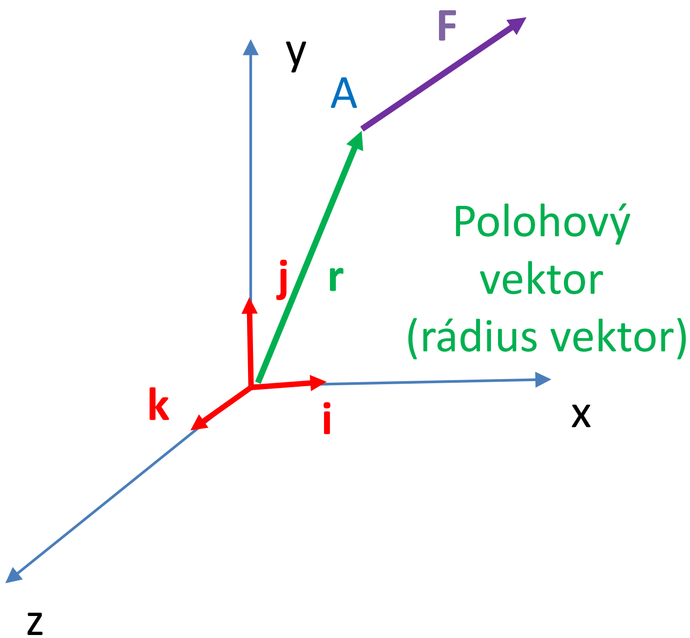
Výsledný otáčivý účinek roven součtu jednotlivých otáčivých účinků

$$\sum \overrightarrow{M_i} = \overrightarrow{M_v}$$

$$M_v = \mathrm{M}_1 + \ \mathrm{M}_1 = F \cdot r + S \cdot p$$

Silová dvojice a její moment

Moment vzhledem k souřadnicovým osám



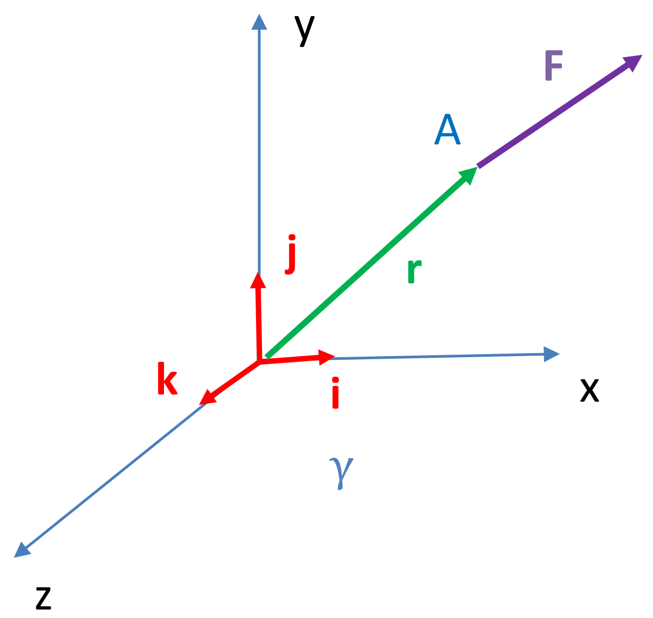
$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} Fx \\ Fy \\ Fz \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\,\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\,\vec{j} + r_z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{M_0} = \vec{\mathrm{r}}\; x\; \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

P7: Moment k bodu v prostoru



Zadání:

Vypočítejte složkové momenty síly **F** vzhledem k souřadnicovému systému

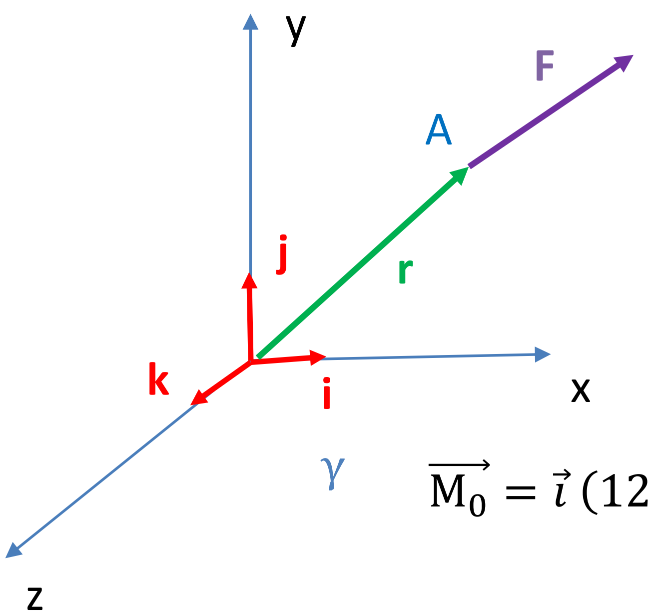
$$\vec{F} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 4\vec{k}$$

$$\vec{r} = 2\vec{\imath} + \overrightarrow{3\jmath} - 5\vec{k}$$

$$\overrightarrow{M_0} = \vec{\mathrm{r}}\ x\ \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_0} = \vec{\mathrm{r}}\ x\ \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

P7: Moment k bodu v prostoru



<u>Zadání:</u>

Vypočítejte složkové momenty síly **F** vzhledem k souřadnicovému systému

$$\vec{F} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 4\vec{k}$$

$$\vec{r} = 2\vec{\imath} + \overrightarrow{3\jmath} - 5\vec{k}$$

$$\overrightarrow{M_0} = \vec{r}\ x\ \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_0} = \vec{\imath}\,(12-5) - \vec{\jmath}\,(8+15) + \vec{k}\,(-2-9) = 7\vec{\imath} - 23\vec{\jmath} - 11\vec{k}$$

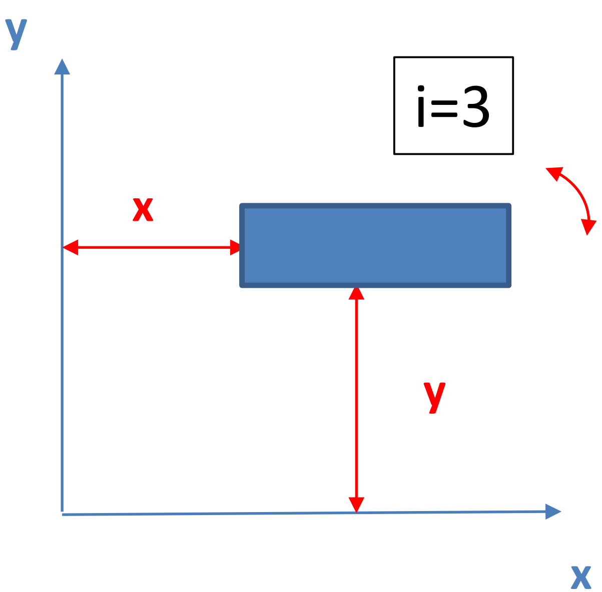
$$Mo = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 26.44\ Nm$$

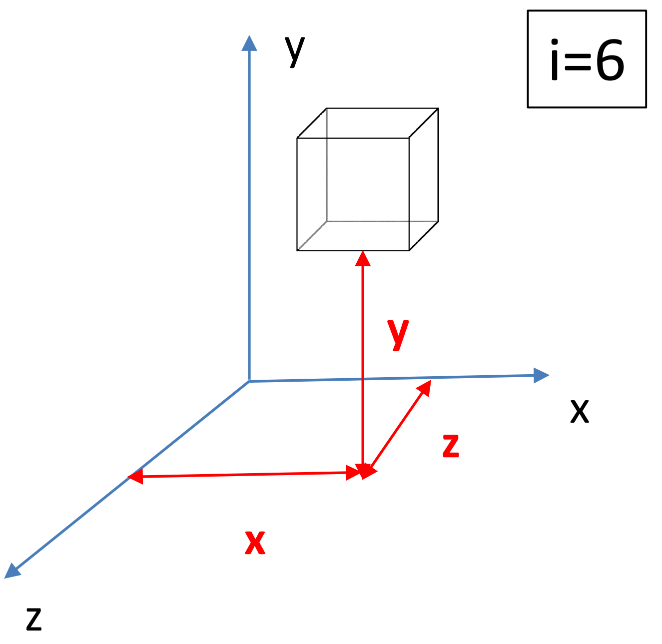
$\cos(\alpha) = \frac{M_x}{M}$ ...(α=74°) $\cos(\beta) = \frac{M_y}{M}$...($\beta$=150°) $\cos(\gamma) = \frac{M_z}{M}$...($\gamma$=114°)

Rovnováha tělesa

Stupeň volnosti tělesa

Počet nezávislých souřadnic (nemusí být kartézské), kterými **určíme** jednoznačně **polohu** nějakého mechanického **objektu**, nazýváme **počtem stupňů volnosti (i)** tohoto objektu.





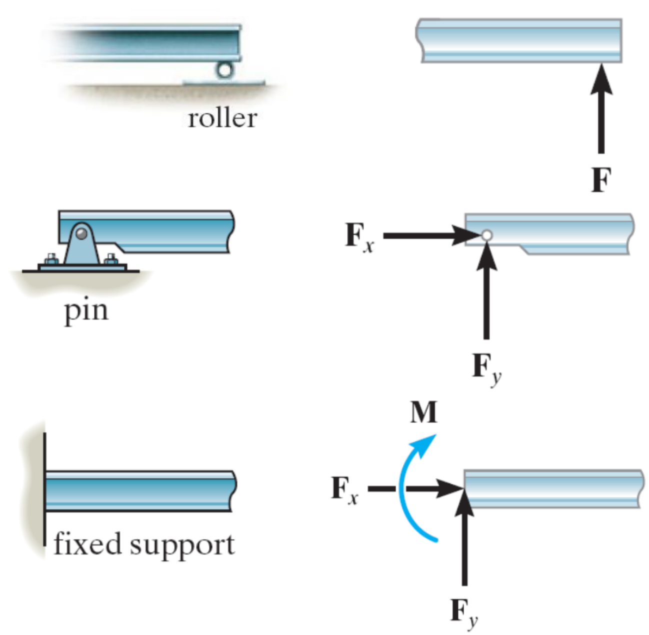
Rovnováha tělesa

Vazby

1) Vazby slouží k zabránění pohybu, tj. odebírají (ruší) stupně volnosti

2) Kolik stupňů vazba ruší, tolik složek reakcí vzniká

3) Při výpočtu uvolníme vazby a nahradíme je silami (momenty), neznámé jsou velikosti reakcí, kladný směr reakcí volíme často ve směru os



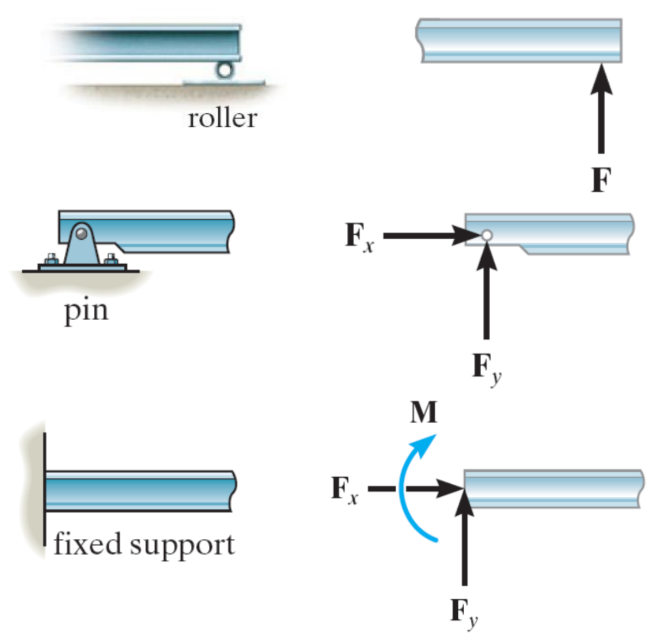
Rovnováha tělesa

Vazby

1) Vazby slouží k zabránění pohybu, tj. odebírají (ruší) stupně volnosti

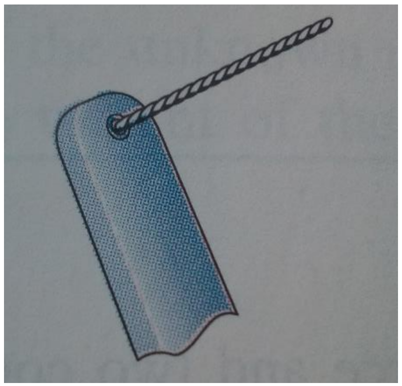
2) Kolik stupňů vazba ruší, tolik složek reakcí vzniká

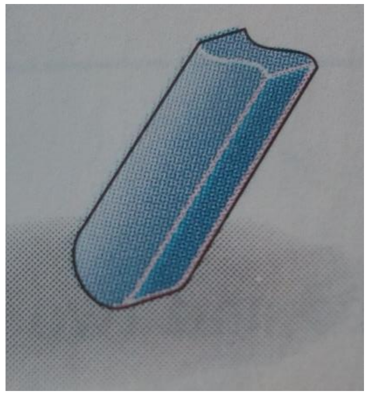
3) Při výpočtu uvolníme vazby a nahradíme je silami (momenty), neznámé jsou velikosti reakcí, kladný směr reakcí volíme často ve směru os

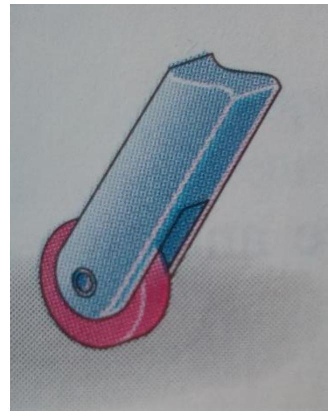


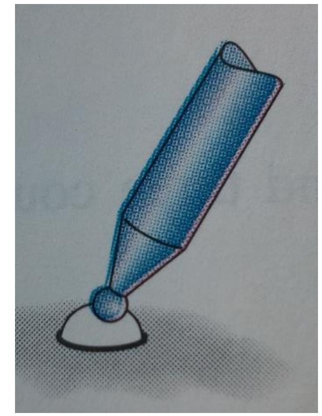
Rovnováha tělesa

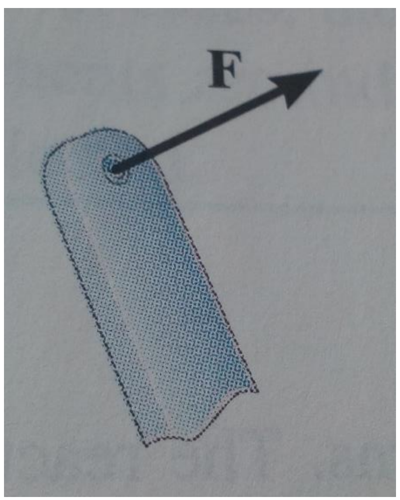
Vazby

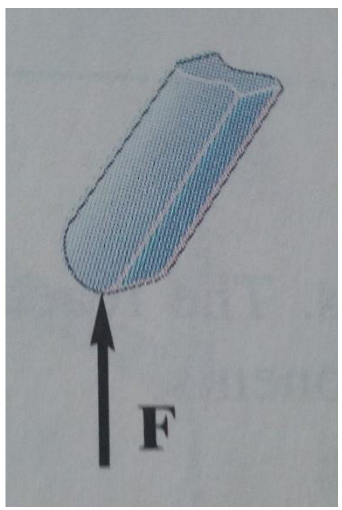


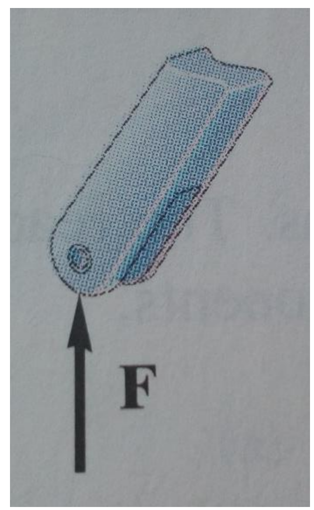


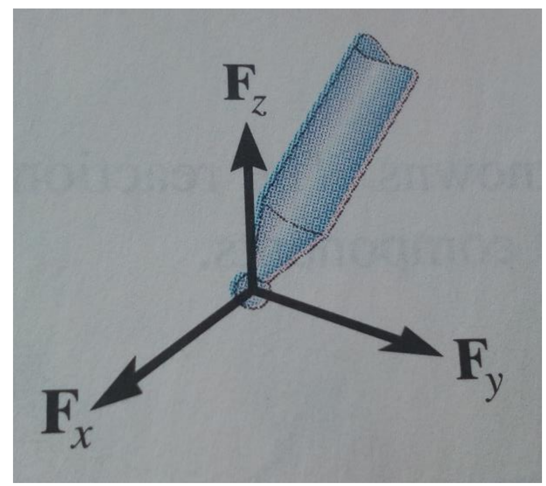






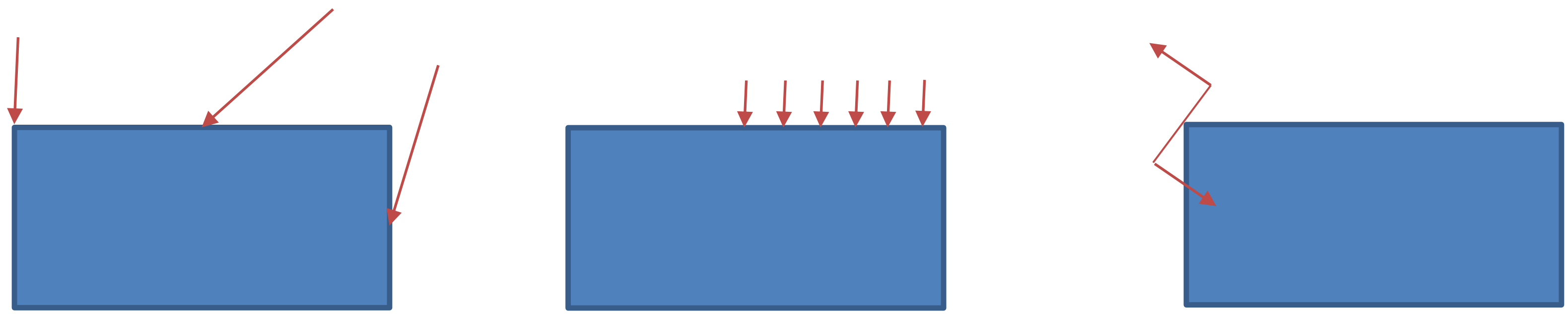




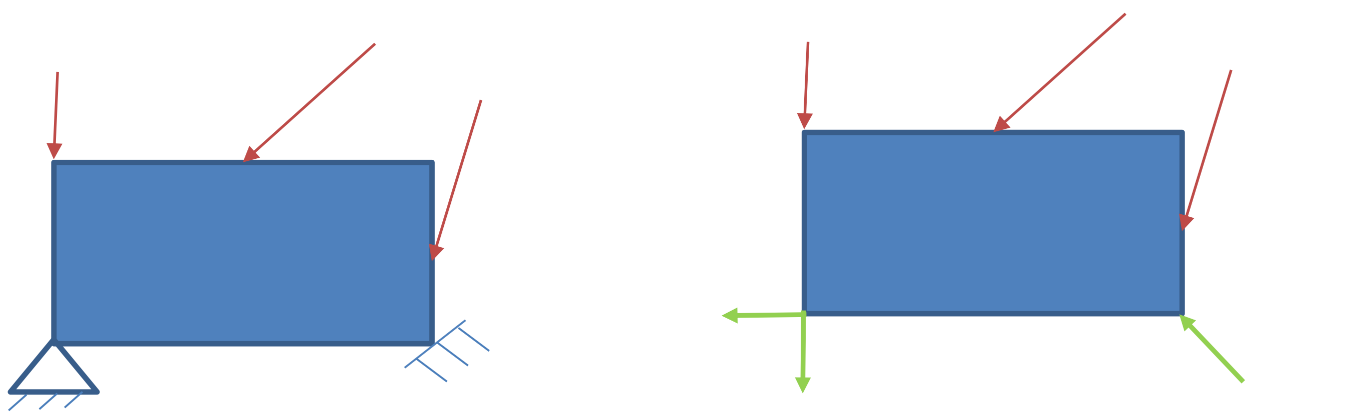


Rovnováha tělesa

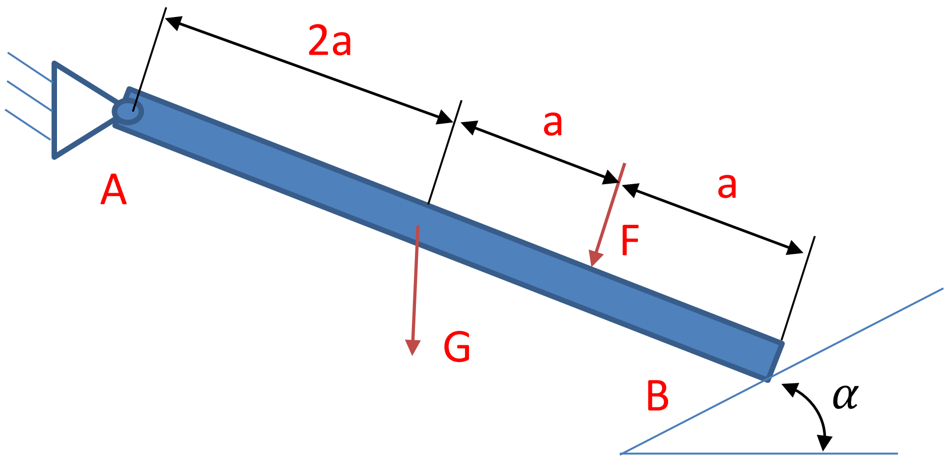
Těleso je vystaveno působení vnějších sil akčních, kterými mohou být <u>osamělé síly</u>, <u>spojité zatížení</u> a <u>momenty</u> silových dvojic.



K řešení sil ve vazbách používáme metodu uvolňování. Pod pojmem uvolnění tělesa rozumíme jeho myšlené vynětí ze soustavy okolních těles, jeho osamostatnění a nahrazení účinku okolních těles vazbovými silami – reakcemi v místech uložení.



P8: Rovnováha tělesa v rovině

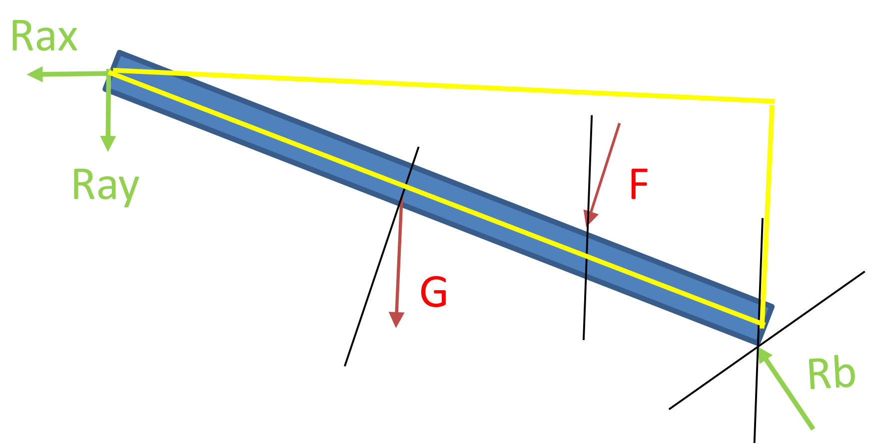


Zadání:
Vypočítejte reakční síly v uložení tělesa.
Dáno: F, G, α, a.

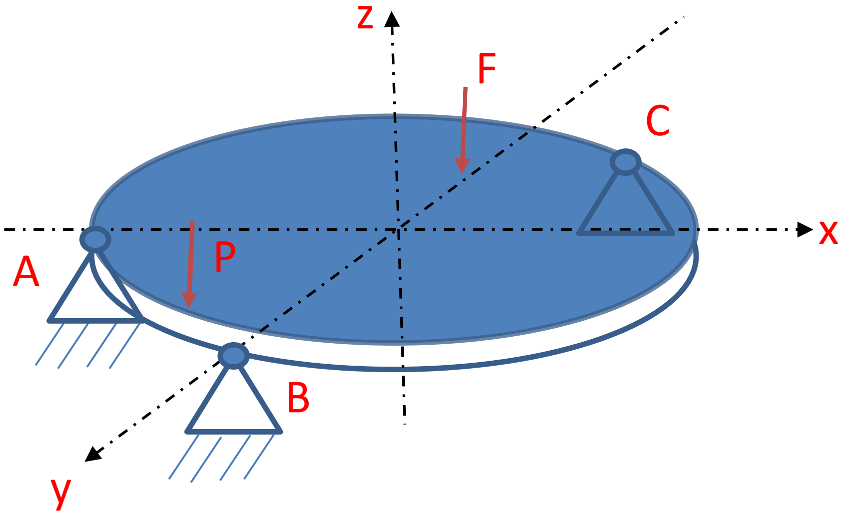
$$\rightarrow x:\ -R_{ax} - F sin\alpha - R_b sin\alpha = 0$$

$$\rightarrow y:\ -R_{ay} - G - F cos\alpha + R_b cos\alpha = 0$$

$$M(A):\ 3aF + 2a\ cos\alpha\ G - 4a \cos\alpha\ R_b cos\alpha + 4a\ sin\alpha\ R_b sin\alpha = 0$$



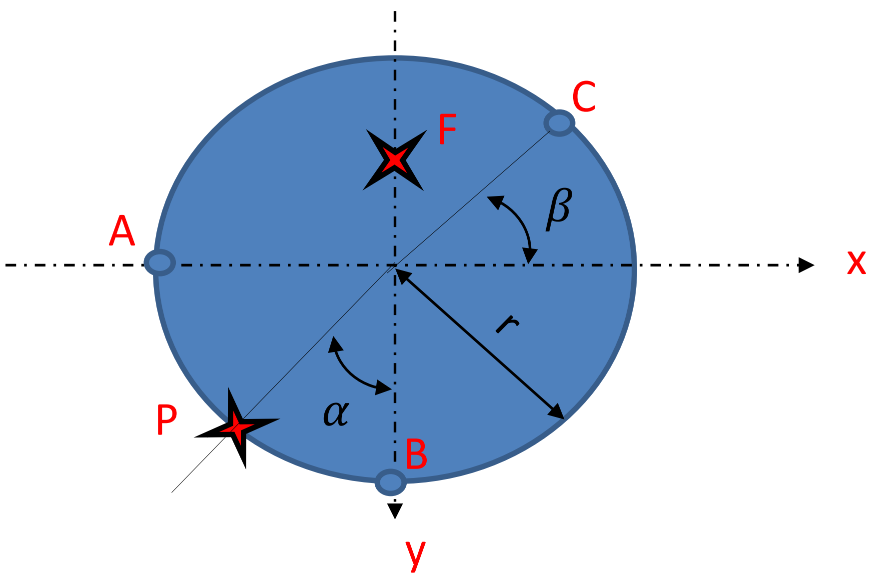
P9: Rovnováha tělesa v prostoru

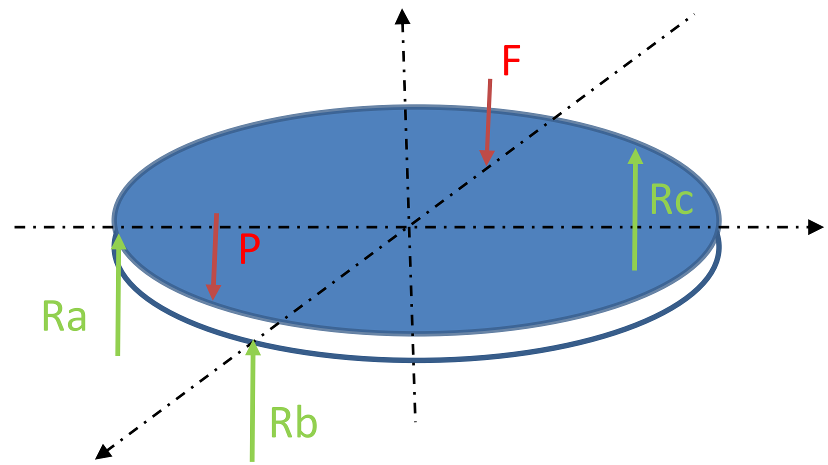


Zadání:

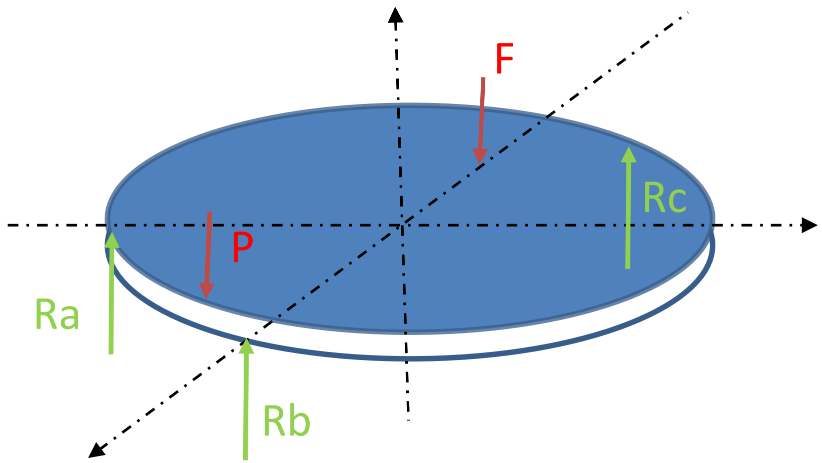
Určete reakční síly v uložení tělesa.

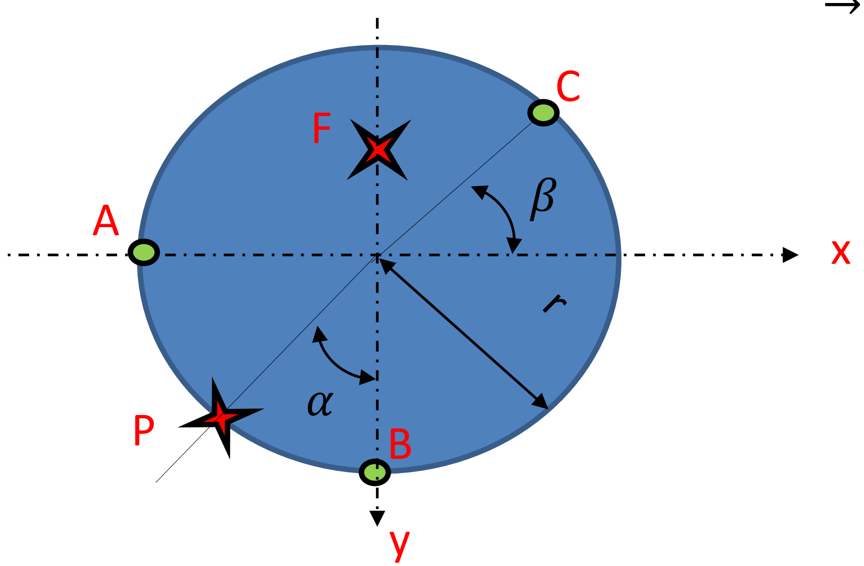
Dáno: F, P α, β, r.





P9: Rovnováha tělesa v prostoru





Zadání:
Určete reakční síly v uložení tělesa.
Dáno: F, P α, β, r.

$$\rightarrow z\colon\ R_a + R_b + R_c - F - P = 0$$

$$\rightarrow Mx\colon\ r\,R_b - r\sin\beta\,R_c + \frac{r}{2}\,F\ - r\cos\alpha\,P = 0$$

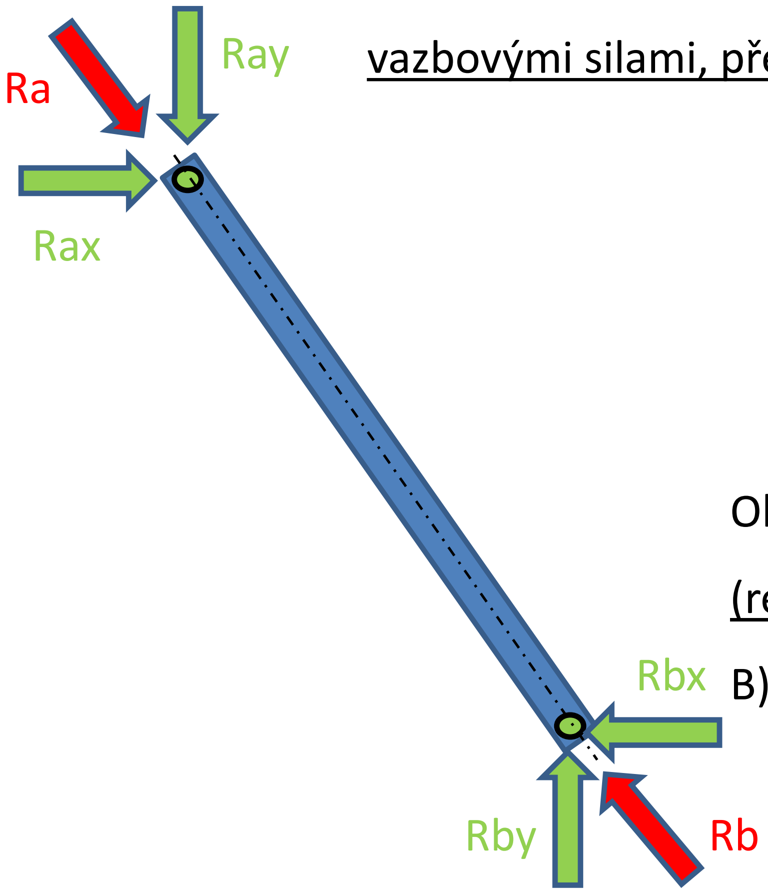
$$\rightarrow My\colon\ r\,R_a - r\cos\beta\,R_c - r\sin\alpha\,P = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & r & -r\sin\beta \\ r & 0 & -r\cos\beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_a \\ R_b \\ R_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{F}+\mathrm{P} \\ r\cos\alpha\,P - \dfrac{r}{2}\,F \\ r\sin\alpha\,P \end{vmatrix}$$

Rovnováha tělesa

Prut

Prut je těleso jehož příčné rozměry jsou mnohokrát menší než jeho délka (podobně jako nosník). Prut je k ostatním tělesům vázán kloubovými vazbami a <u>není zatížen jinak, než vazbovými silami, přenášenými kloubovými vazbami</u>.



$\rightarrow$ x: $R_{ax} = R_{bx}$

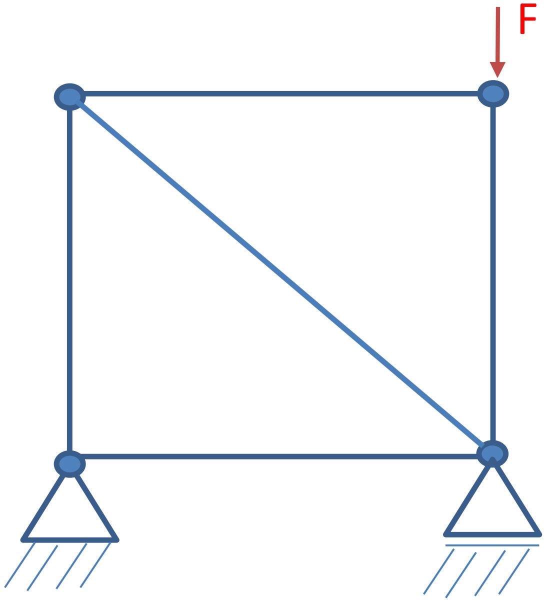
$\rightarrow$ y: $R_{ay} = R_{by}$

Oba klouby (A i B) přenášejí <u>stejně velkou vazbovou (reakční)</u> sílu, jež má <u>směr osy prutu</u> (spojnice bodů A a B).

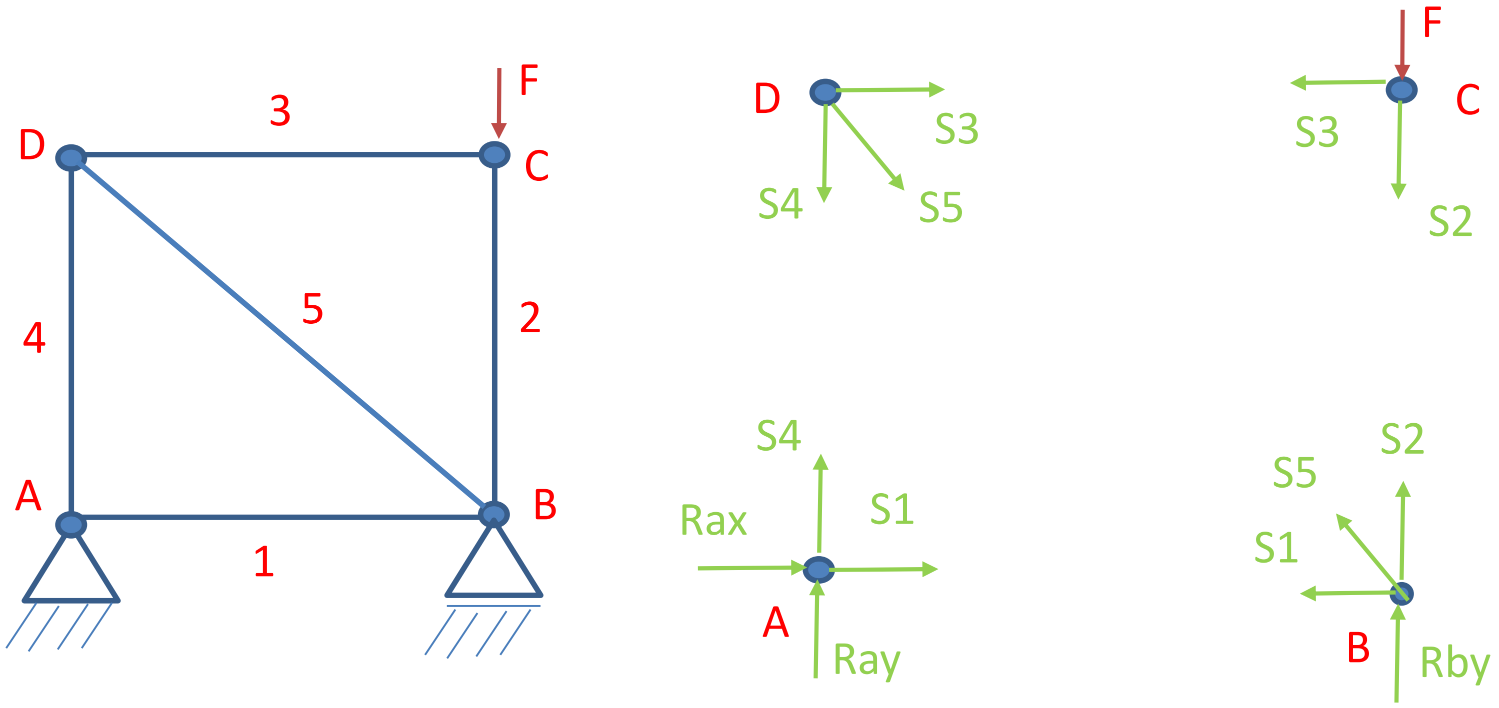
$$\boxed{R_a = R_b}$$

Prutová soustava

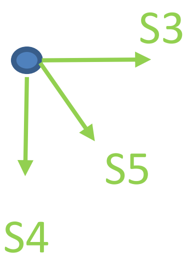
Prutová soustava je soustava, tvořená výhradně pruty, které jsou k ostatním prutům vázány výhradně kloubovými vazbami. Zatíženy probíhá výhradně ve styčnících (kloubová spojení jednotlivých prutů). Předmětem řešení statiky prutové soustavy je zjištění velikosti osových sil v prutech.

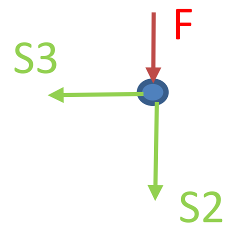


Prutová soustava



Prutová soustava



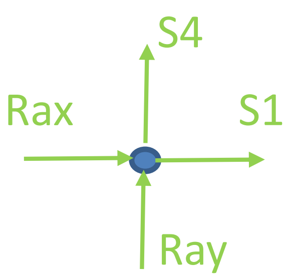


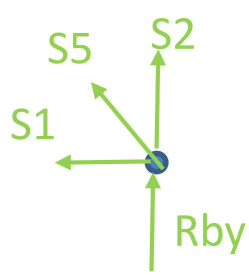
$$\rightarrow x:\ R_{ax} + S1 = 0$$

$$\rightarrow y:\ R_{ay} + S4 = 0$$

$$\rightarrow x:\ -S1 - S5\cos(45°) = 0$$

$$\rightarrow y:\ R_{by} + S2 + S5\sin(45°) = 0$$





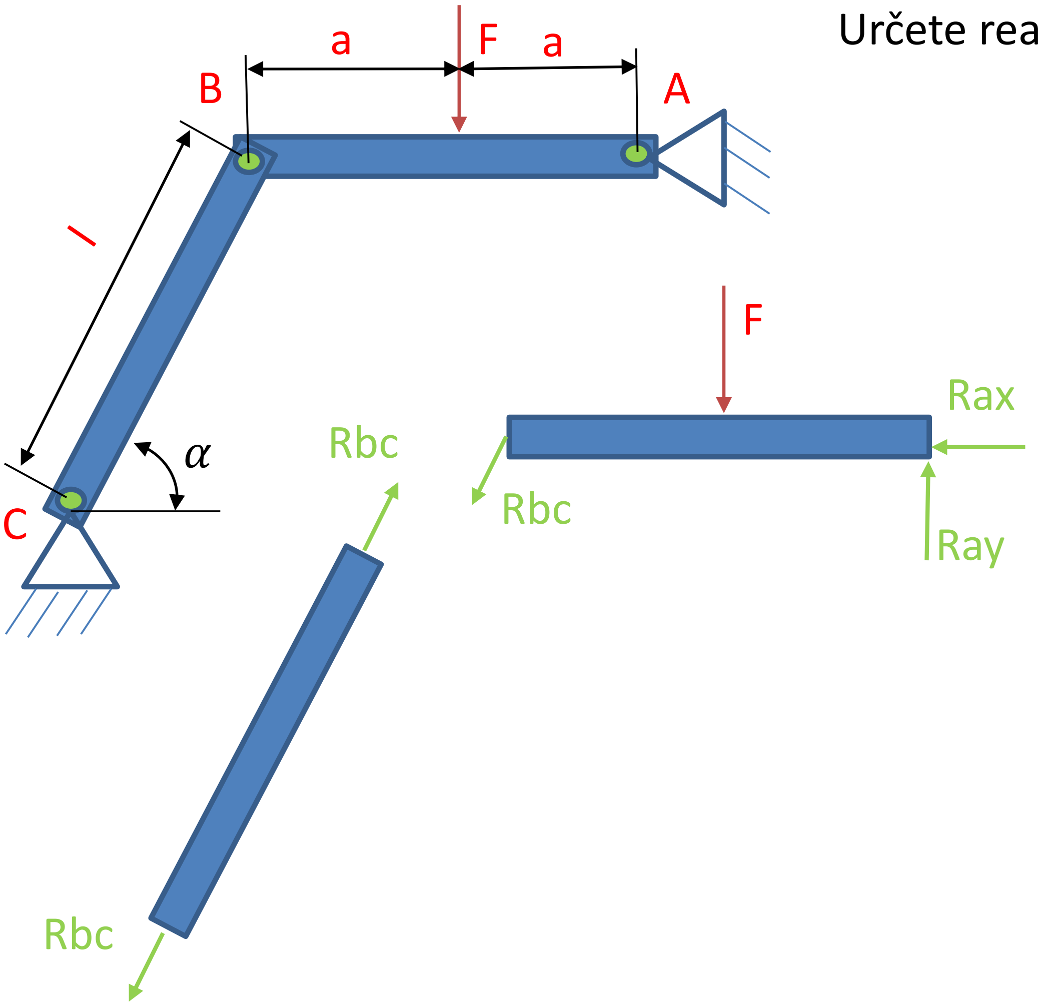
$$\rightarrow x:\ -S3 = 0$$

$$\rightarrow y: -F - S2 = 0$$

$$\rightarrow \mathrm{x}:\ S3 + S5\cos(45°) = 0$$

$$\rightarrow y: -S4 - S5\sin(45°) = 0$$

P10(a): Rovnováha soustavy těles



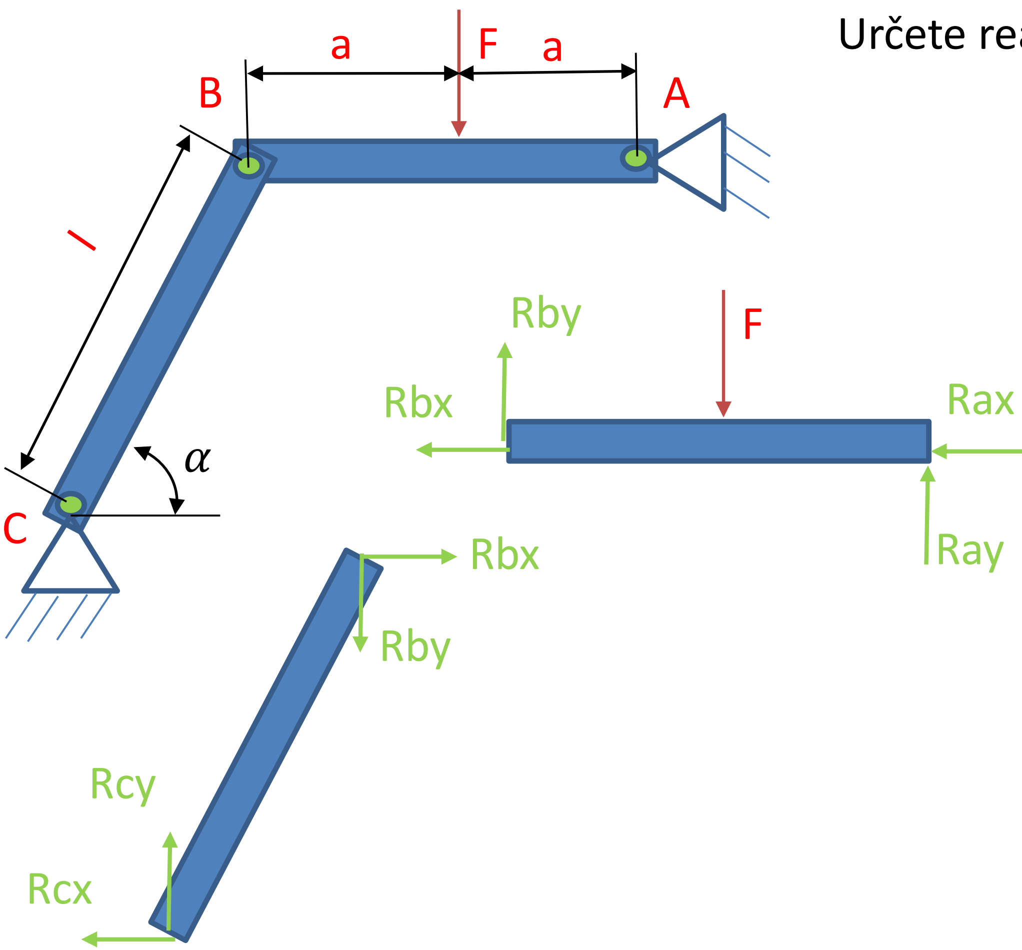
Zadání:
Určete reakční (vazbové) síly v kloubech A, B a C.
Dáno: F, a, l a α.

$\rightarrow x\colon\ -R_{bc}\cos\alpha - R_{ax} = 0$

$\rightarrow \mathrm{y}\colon\ -R_{bc}\, sin\,\alpha + R_{ay} - \mathrm{F} = 0$

$\rightarrow \mathrm{M(B)}\colon \mathrm{a\,F} - 2a\, R_{ay} = 0$

P10(b): Rovnováha soustavy těles



Zadání:
Určete reakční (vazbové) síly v kloubech A, B a C.
Dáno: F, a, l a α.

$$\rightarrow x:\ -R_{bx} - R_{ax} = 0$$

$$\rightarrow \mathrm{y}:\ R_{by} + R_{ay} - \mathrm{F} = 0$$

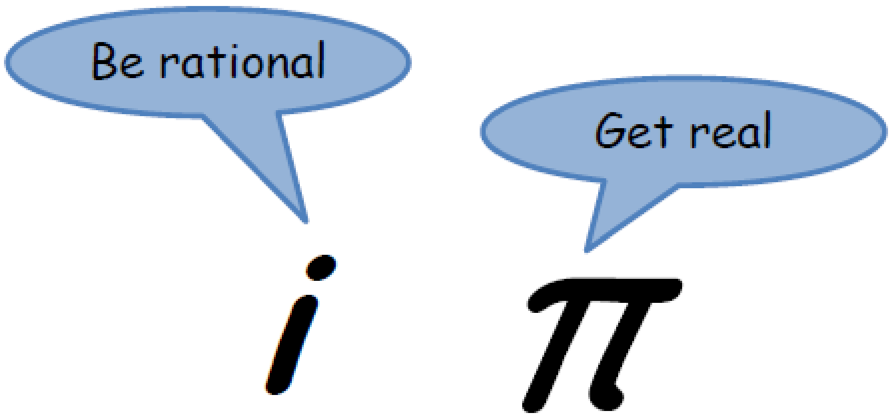
$$\rightarrow \mathrm{M(B)}: \mathrm{a\ F} - 2a\ R_{ay} = 0$$

$$\rightarrow x:\ R_{bx} - R_{cx} = 0$$

$$\rightarrow \mathrm{y}:\ R_{cy} - R_{by} = 0$$

$$\rightarrow \mathrm{M(B)}: l\ cos\alpha\ R_{cy} + l\sin\alpha\ R_{cx} = 0$$

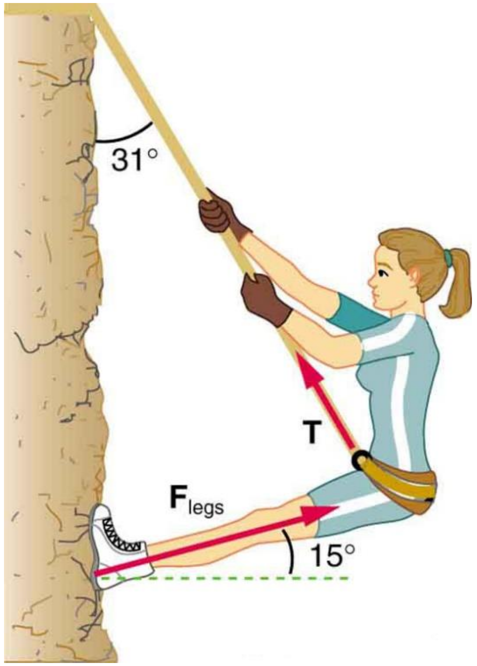
3 min pauza



Zdroj: LaTEX/MathJokes

Pasivní odpory

Pohyb těles v tekutinách a pohyb mechanických soustav je doprovázen vznikem pasivních odporů proti pohybu. Práce vykonaná pasivními odpory se mění v teplo. Matematický popis je obtížný a dal vzniknout samostatnému oboru – tribologie.

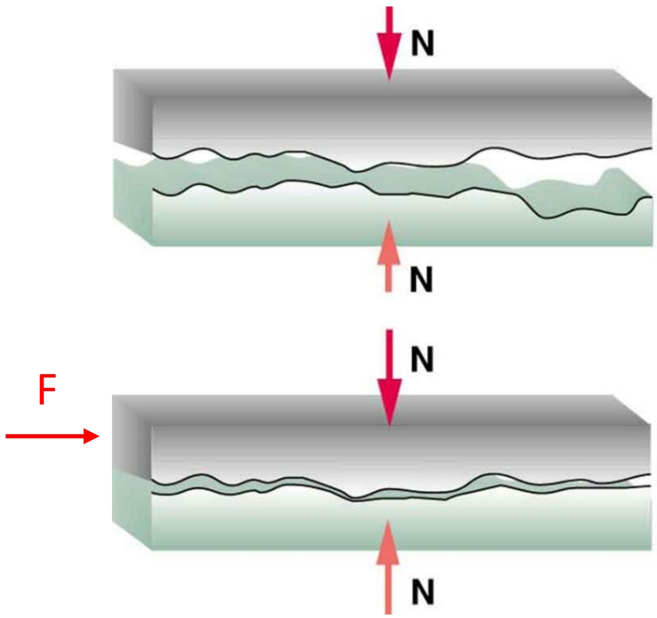


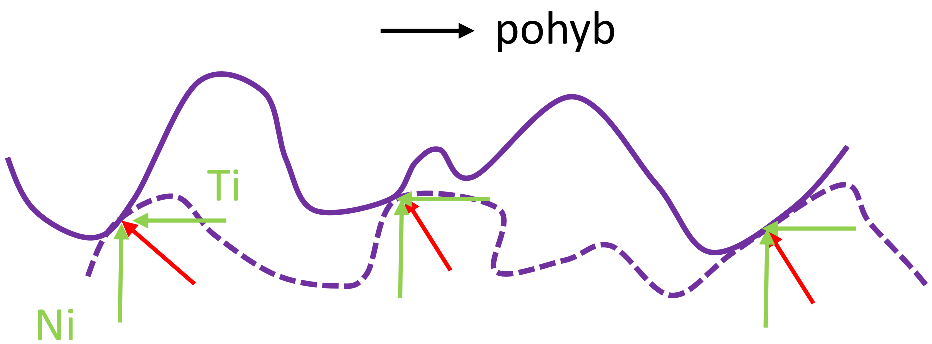
Zdroj: StudiosGuy a Lumenlearing

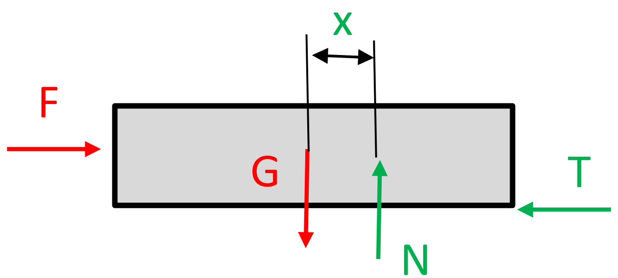
Pasivní odpory

Smykové tření

Pojmem tření obvykle rozumíme vzájemné působení různých stýkajících se těles, které brání jejich relativnímu pohybu.



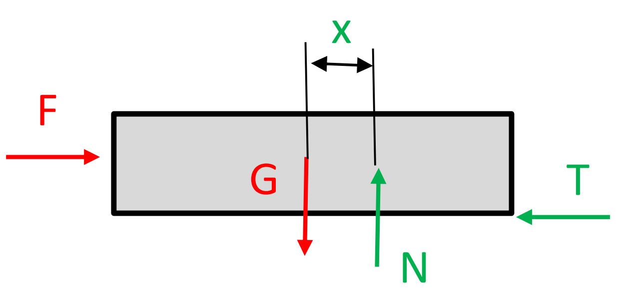




Pasivní odpory

Smykové tření

Smykové tření se projevuje třecí silou T v kontaktu dvou vzájemně se pohybujících těles. Síla T má vždy opačný smysl vzhledem k pohybu. Velikost třecí síly určuje Coulombův zákon.

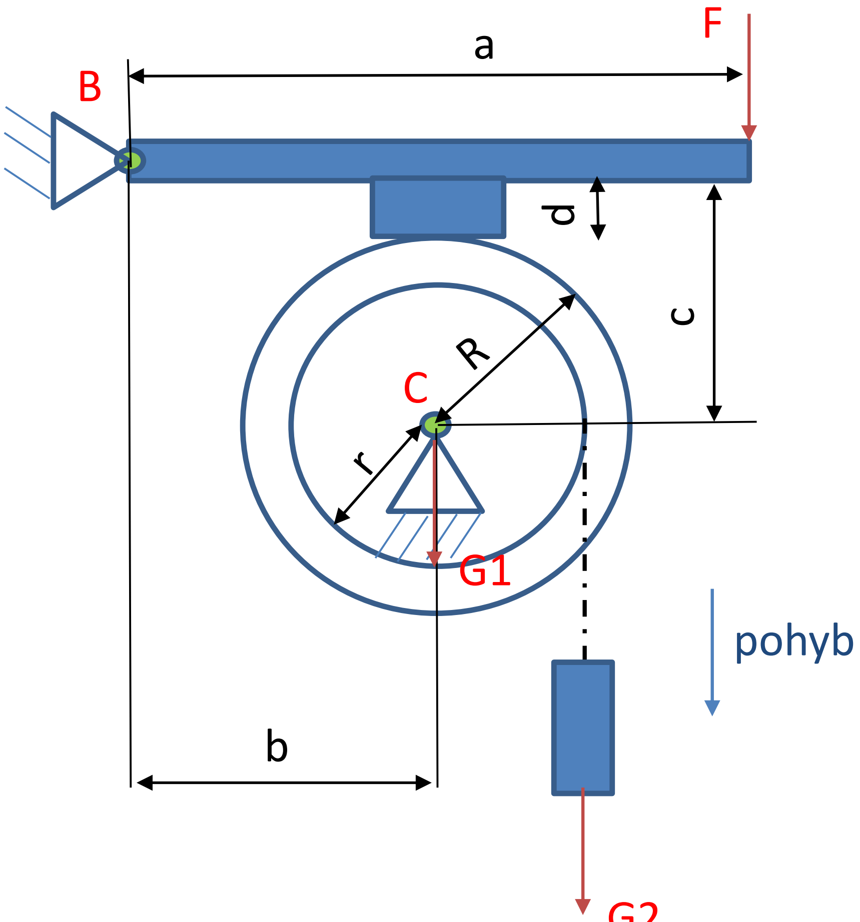


$$\boxed{T = N\,f}$$

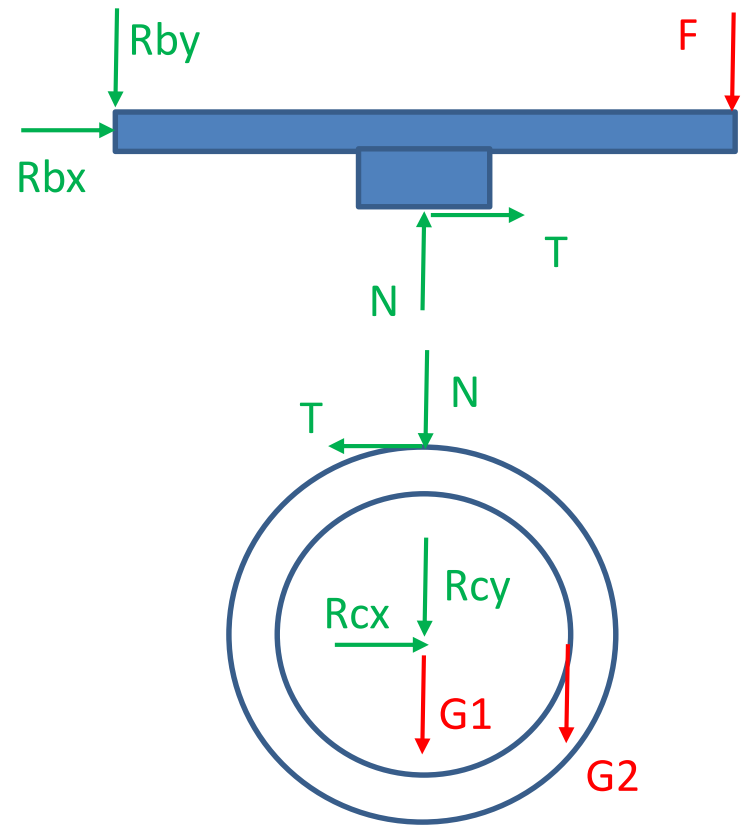
N … normálová reakce
f … součinitel smykového tření

Materiály	f [-]
Ocel na bronzu (mazáno)	0,1
Ocel na bronzu (suchá)	0,18
Ocel na dřevě	0,55
Ocel na ledu	0,027

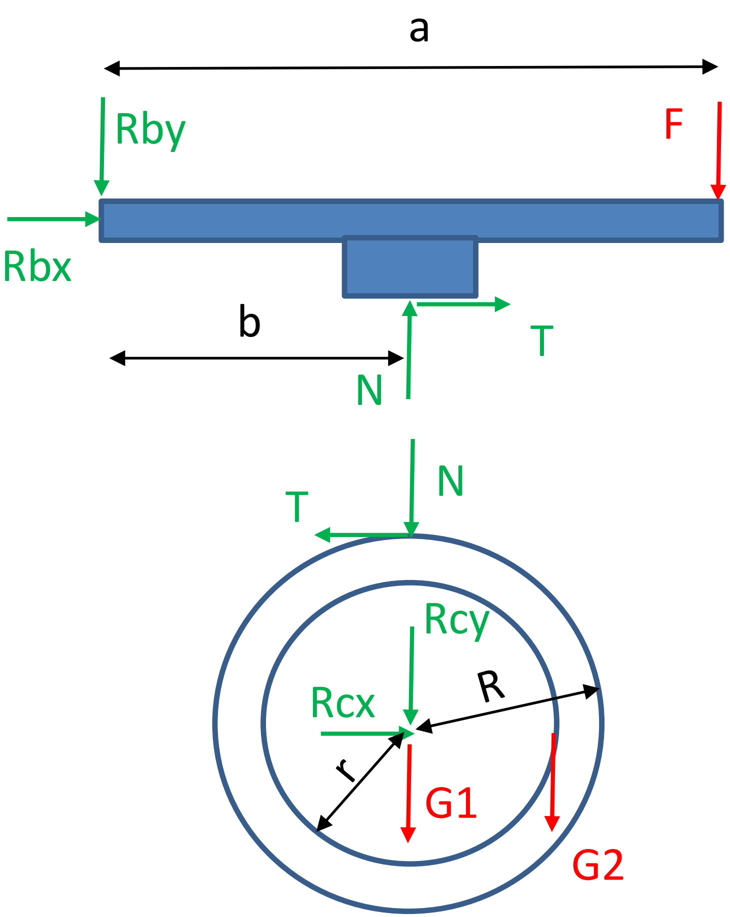
P11: Smykové tření



Zadání:
Určete reakční (vazbové) síly v kloubech B a C.
Dáno: r, R, a, b, c, d, G1, G2 a součinitel tření f.



P11: Smykové tření



$$\rightarrow x:\ R_{bx} + T = 0$$

$$\rightarrow y:\ -R_{by} - F + N = 0$$

$$\rightarrow M(B):\ a\,F - b\,N - d\,T = 0$$

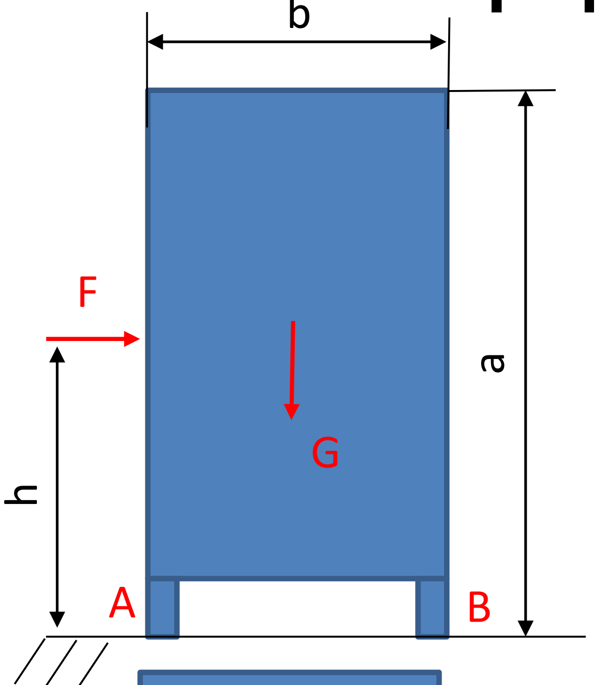
$$\rightarrow x:\ R_{cx} - T = 0$$

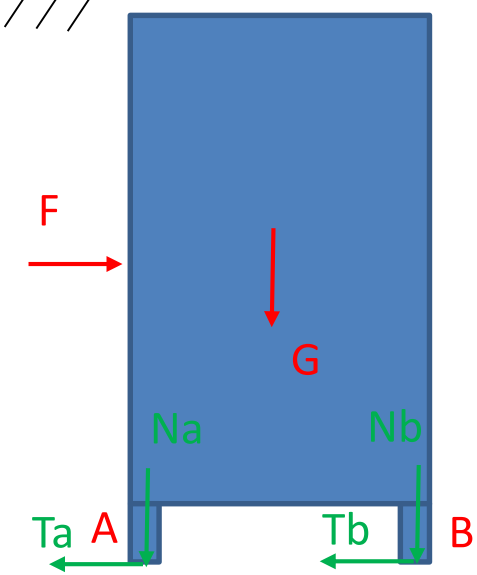
$$\rightarrow y:\ -G1 - G2 - R_{cy} - N = 0$$

$$\rightarrow M(C):\ r\,G2 - R\,T = 0$$

$$T = N\,f$$

P12: Smykové tření





Zadání:
Určete velikost síly F a výšku h, kde síla F působí, aby nedošlo k překlopení.
Dáno: G, a, b, f

$$\rightarrow \mathrm{x}: F - Ta - Tb = 0$$

$$\rightarrow y: -G - Na - Nb = 0$$

$$\rightarrow M(B): -\frac{b}{2}G + h\,F - b\,Na = 0$$

$$Ta = \mathrm{Na\ f} \qquad Tb = \mathrm{Nb\ f}$$

$$N_A + N_B = G$$

$$\boxed{F = T_A + T_B = N_A f + N_B f = (N_A + N_B) f = Gf}$$

$$h_{min} = \frac{G\frac{b}{2} + N_a b}{F}$$

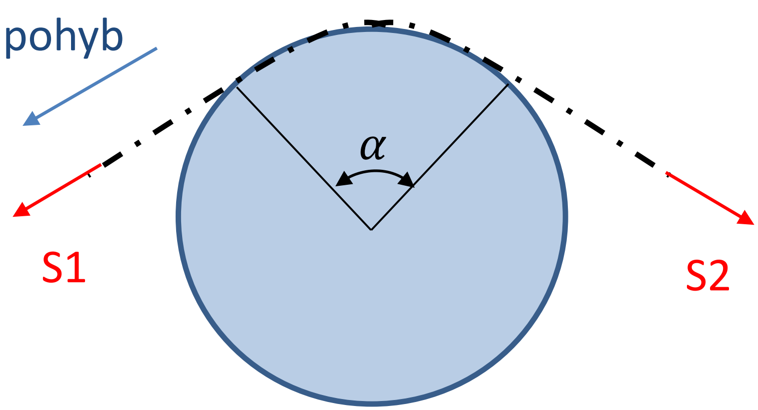
N_a=0 …překlopení

$$\boxed{h_{min} = \frac{G\frac{b}{2}}{F}}$$

Pasivní odpory

Smykové tření lana

Smykové tření lana (pásu) při úhlu opásání α se projeví tím, že při smýkání $S1 \neq S2$. je-li součinitel smykového tření mezi lanem a bubnem f, platí Eulerův vztah:



$$\boxed{S_1 = S_2 e^{\alpha f}}$$

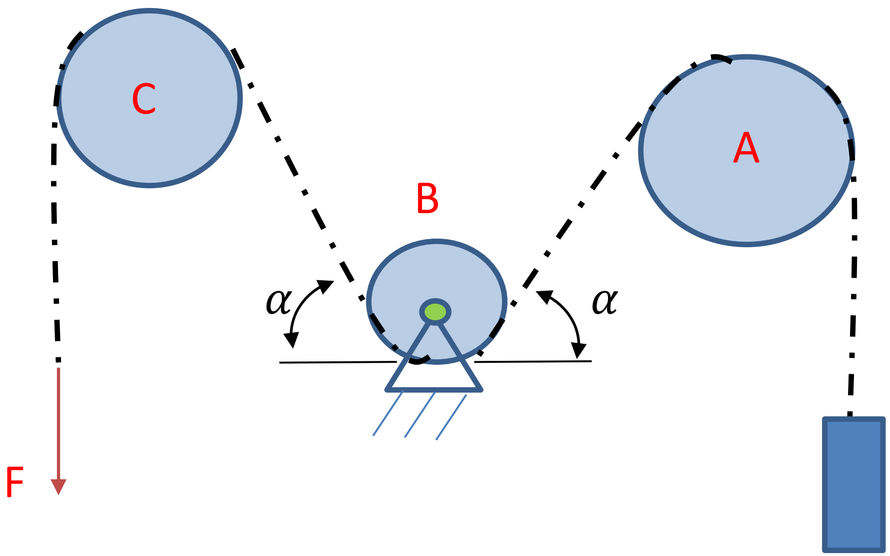
P12: Smykové tření

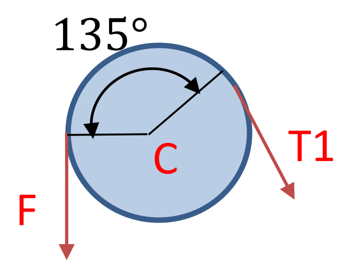
Zadání:

Maximální tah (síla F), který může být vyvozen je 500 N. Určete maximální hmotnost břemene (m), kterou je možné zdvihnout tímto mechanismem

Dáno: F=500 N, α=45°

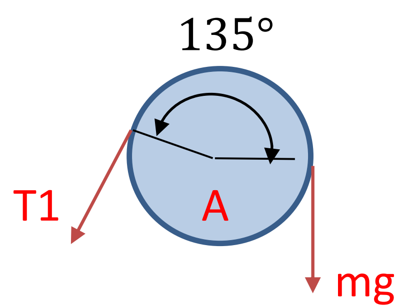
a součinitel tření f=0.25.





$$F = T_1 e^{135f}$$

$$T_1 = \frac{F}{e^{135f}} = 277\ N$$



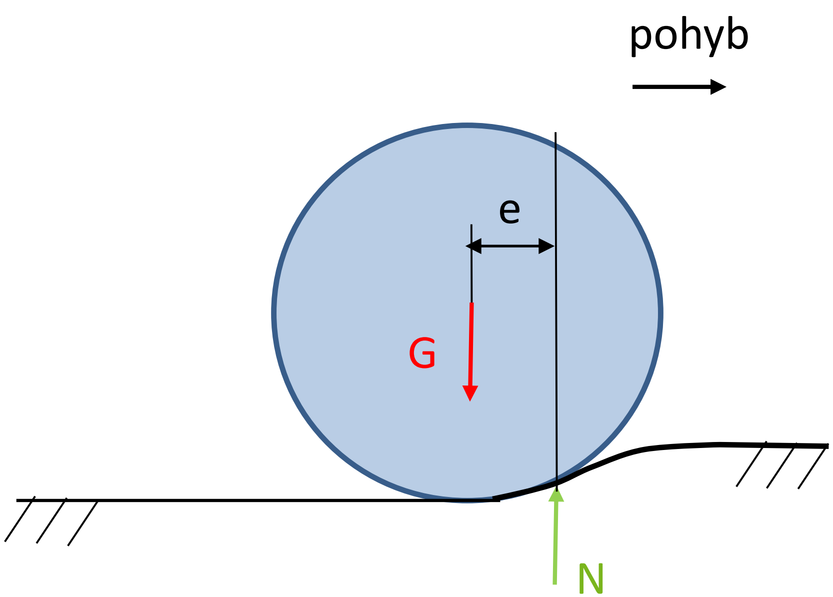
$$T_1 = mg\ e^{135f}$$

$$\boxed{m = \frac{T_1}{g\ e^{135f}} = 15.7\ kg}$$

Pasivní odpory

Odpor valení

Odpor valení se projevuje odporovým účinkem při valení válce na rovné podložce tím, že vlivem deformace válce i podložky se nositelka reakce N posune ve směru valení o tzv. rameno valivého odporu (e). Podmínka valení vyžaduje, aby tečná reakce mezi válcem a podložkou by menší než smyková síla T, příslušející normálové reakci.



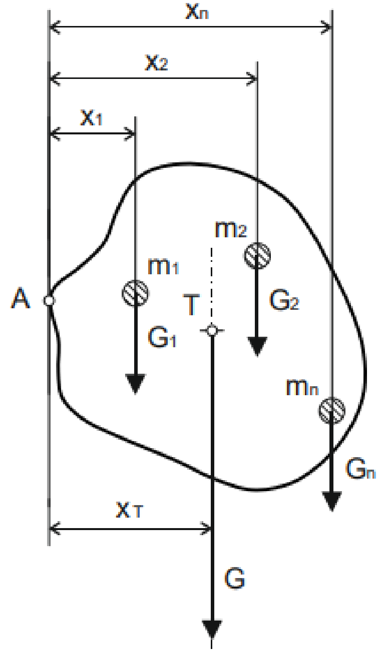
Materiály	Rameno valivého odporu [mm]
Kalená ocel na kalené oceli (valivá ložiska)	0,01-0,1
Dřevo na oceli	0,5-0,7
Dřevo na dřevě	0,5-1,5

Těžiště

Těžiště = střed hmotnosti. Tímto bodem prochází výsledná tíhová síla útvaru při jakékoliv orientaci v tíhovém poli.

Těžiště

Představme si, že se těleso skládá z n hmotných bodů, které mají hmotnost a projevují se tíhovou sílou G. Ke zjišťování polohy tělesa budeme využívat věty momentové věty: Součet momentů elementárních hmotných bodů k těžišti je roven momentu výsledné tíhové síly taktéž k těžišti.

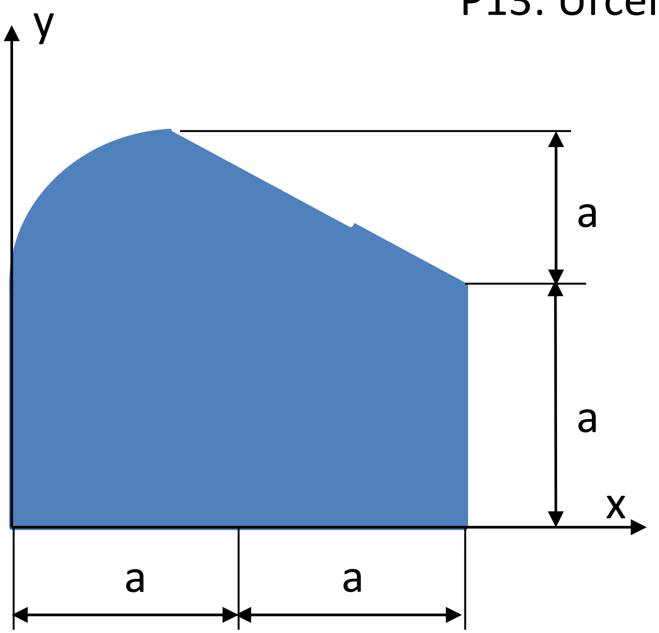


$$\boldsymbol{M} = \sum M_i = G_1x_1 + G_2x_2 + G_3x_3 + \cdots + G_nx_n = G_vx_T$$

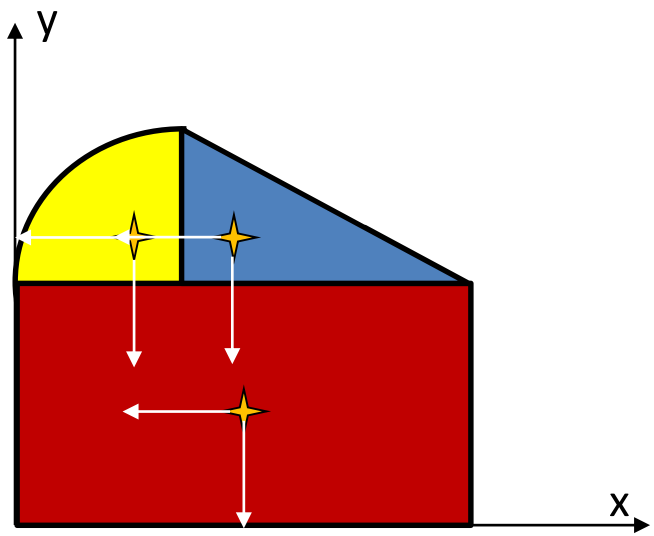
V technické praxi určujeme těžiště proporčních sil úměrných délce, ploše nebo objemu dané tělesa.

Těžiště

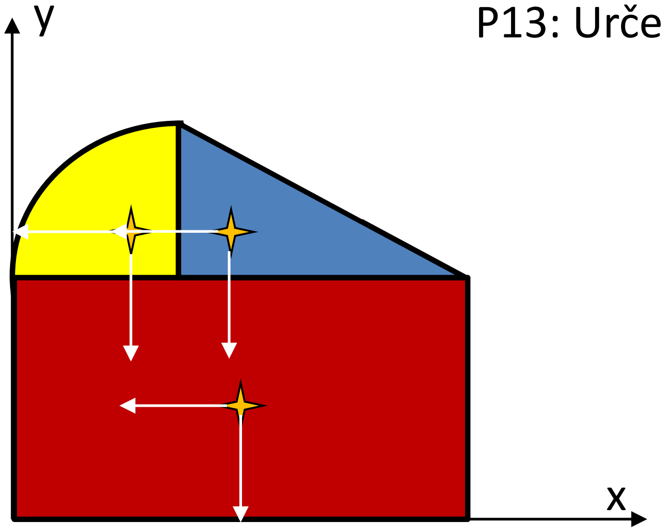
P13: Určení těžiště rovinného útvaru



Zadání:
Určete souřadnice těžiště , pokud znáte a=0.5 m.



Těžiště



P13: Určení těžiště rovinného útvaru

Zadání:
Určete souřadnice těžiště , pokud znáte a=0.5 m.

$$x_T = \frac{1}{S}\sum S_i = S_1x_1 + S_2x_2 + S_3x_3$$

$$S = S_1+S_2+S_3 = 2aa + \frac{\pi a^2}{4} + \frac{1}{2}aa = a^2(\frac{5}{2} + \frac{\pi}{4})$$

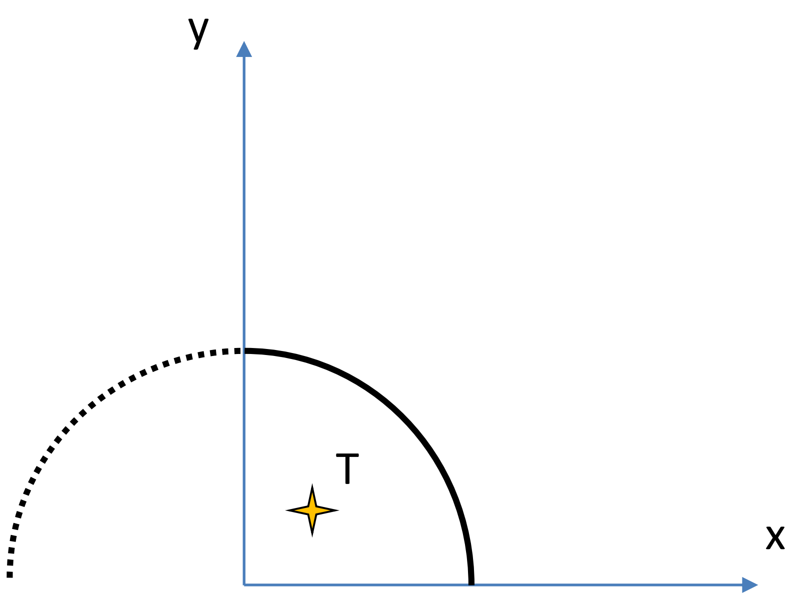
$$x_T = \frac{2aa\cdot 0 + \frac{\pi a^2}{4}\cdot\left(-\frac{4a}{3\pi}\right) + \frac{1}{2}aa\cdot\frac{1}{3}a}{S} = \frac{-10a}{3(10+\pi)} = -0{,}087\ m$$

$$y_T = \frac{2aa\cdot\frac{a}{2} + \frac{\pi a^2}{4}\cdot\left(\frac{4a}{3\pi} + a\right) + \frac{1}{2}aa\cdot(a + \frac{1}{3}a)}{S}$$

Těžiště – Guildinovy věty

1. Povrch rotačního tělesa je roven součinu délky meridiánové křivky a délky dráhy těžiště této křivky při rotaci

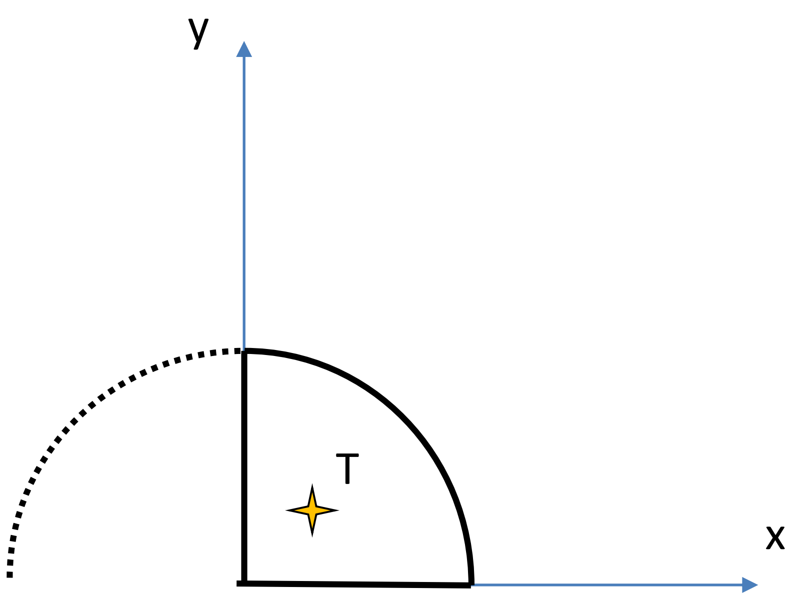
$$\boxed{S = l\,2\;\cdot \pi \cdot x_T}$$



$$\boxed{\frac{1}{2}4\pi R^2 = \frac{\pi}{2}R\;2\;\cdot \pi \cdot x_T}$$

Těžiště – Guildinovy věty

2. Objem rotačního tělesa je roven součinu plochy pod křivkou a délky dráhy těžiště této plochy při rotaci



$$\boxed{V = S\,2\cdot\pi\cdot x_T}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{4}\pi\cdot R^2 2\cdot\pi\cdot x_T}$$

Použitá literatura

- **http://www.umt.fme.vutbr.cz/images/opory/Mechanika%20I%20-%20Statika/Tech_mech_I.pdf**

- https://kke.zcu.cz/export/sites/kke/old_web/_files/projekty/enazp/17/IUT/177_Mechanika_statika_IUT_P1.pdf

- Juliš K., Brepta R. Mechanika I. SNTL 1986, Praha

Pružnost a pevnost

Definice

Tuhost

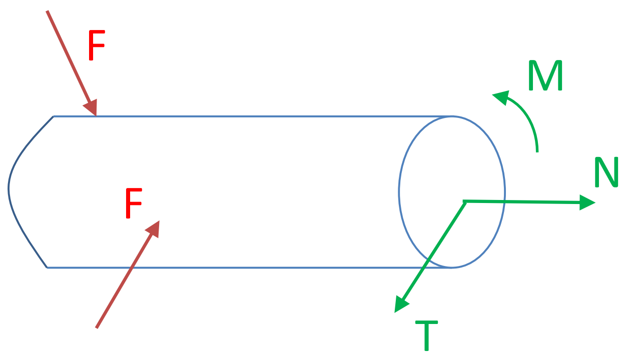
Odolnost proti deformacím.

Pevnost

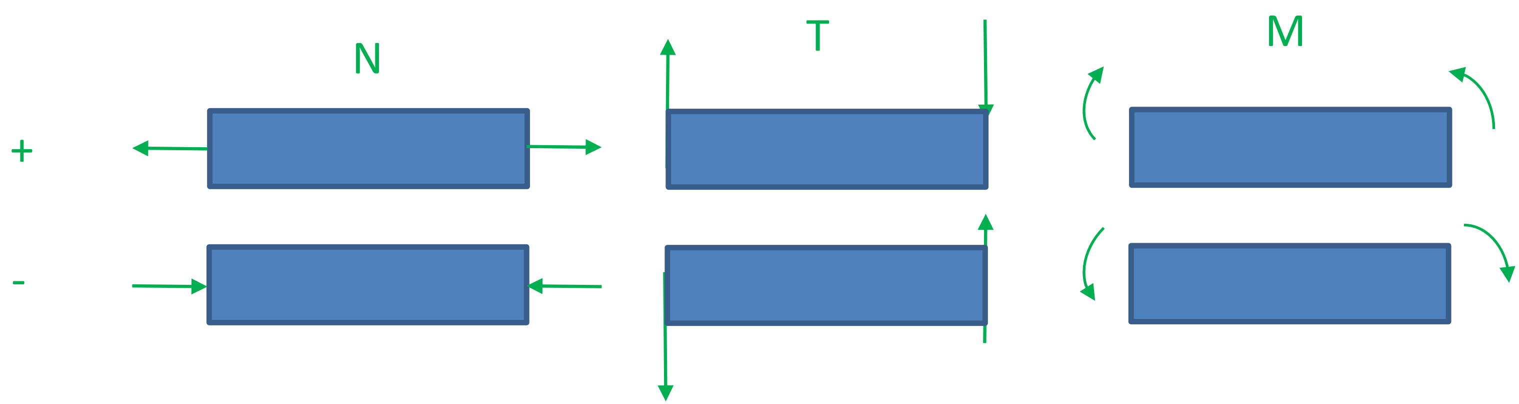
Odolnost proti porušení.

Vnitřní síly

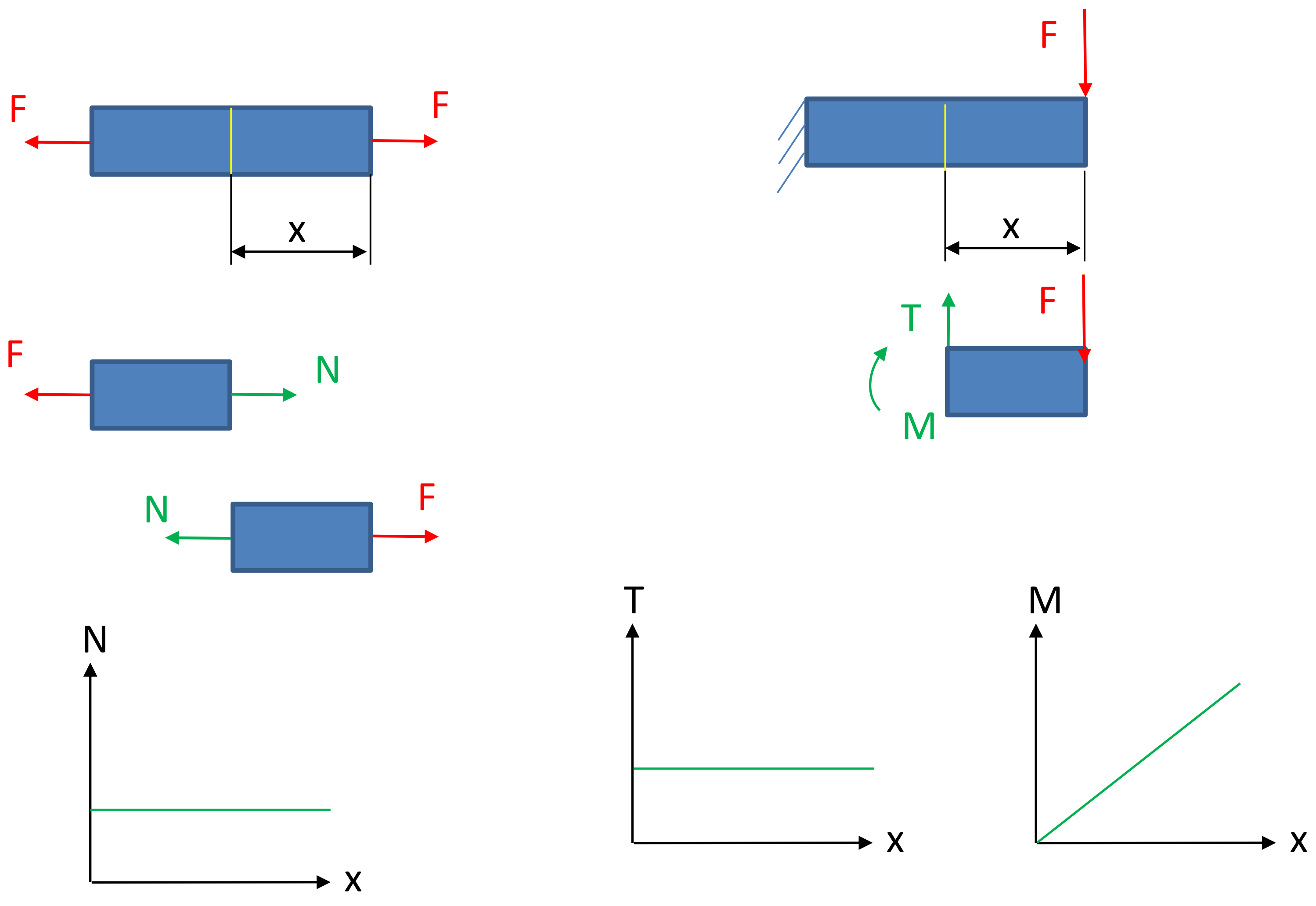
Aplikace podmínek statické rovnováhy sil umožnuje určit výsledné vnitřní silové účinky v libovolném řezu závislé na zatěžujících silách a momentech. Pro určení výsledných účinků v řezu uvážíme rovnováhu oddělené části tělesa při zatíží všemi silami a momenty působícími na oddělenou část a po připojení výsledných statických účinků.



- N … normálová síla kolmá na rovinu řezu
- T … smyková síla v rovině řezu
- M … ohybový moment s osou v rovině řezu

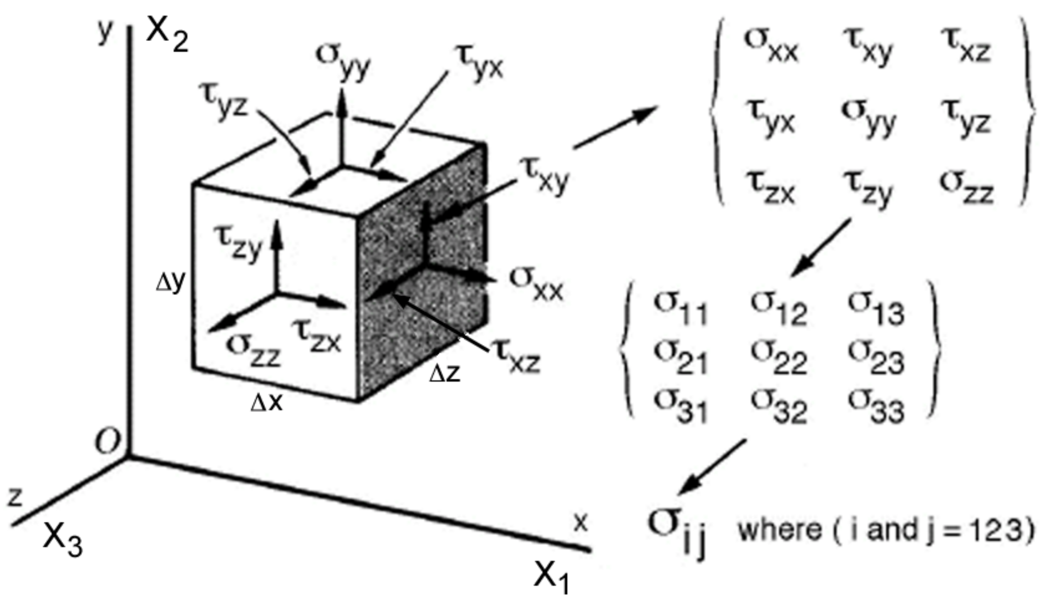


Vnitřní síly



Definice napětí

Napjatost vzniká v tělese při zatížením vnějšími silami a dá se v obecném případě vyjádřit <u>šesti složkami napětí</u>.

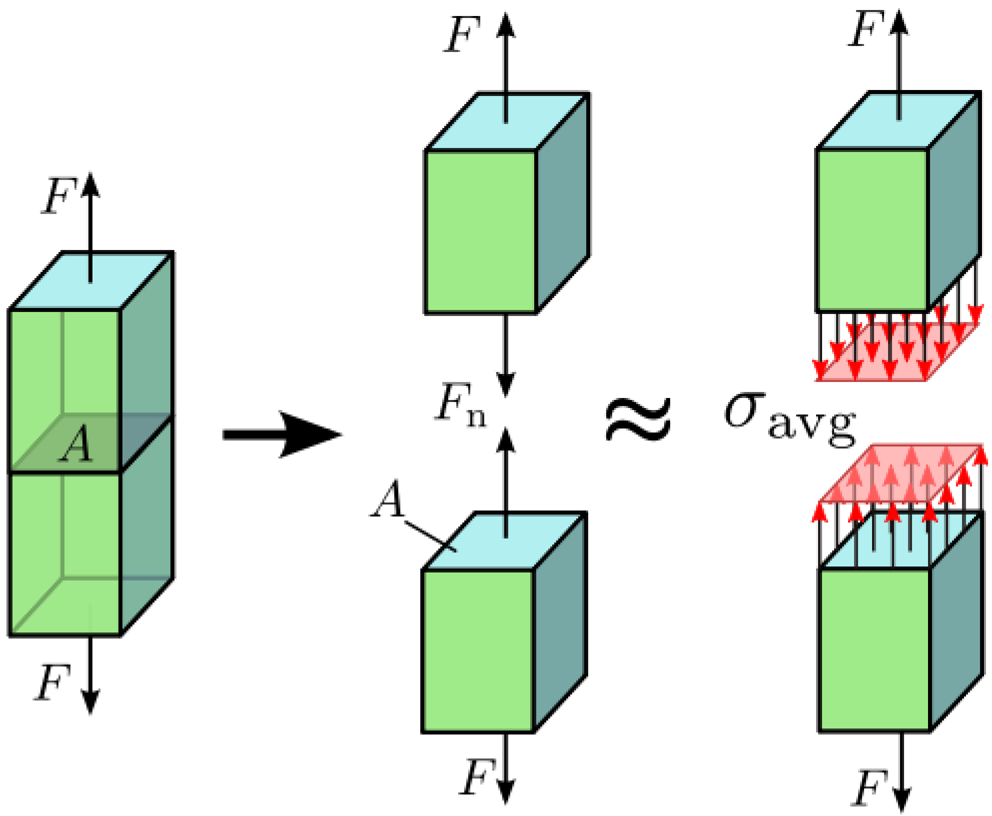


<u>Normálová napětí</u> se zpravidla označují řeckým písmenem σ.

<u>Smyková napětí</u> se zpravidla označují řeckým písmenem τ a dvěma indexy, první index značí směr normály plochy, na které napětí působí, druhý index směr napětí

$$\boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}}$$

Namáhání tahem



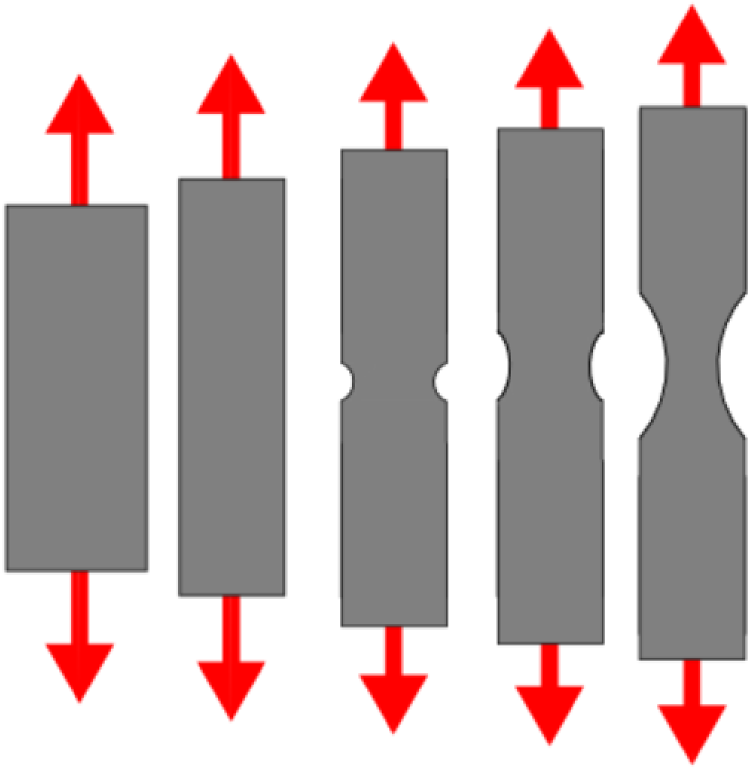
$$\sigma = \frac{Fn}{A}\ [\mathrm{Pa}]$$

Namáhání tahem

$$\sigma = \frac{Fn}{A} \text{ [Pa]}$$

$$\sigma_{smluvní} = \frac{Fn}{A_{počáteční}} \text{ [Pa]}$$

$$\sigma_{skutečné} = \frac{Fn}{A_{skutečné}} \text{ [Pa]}$$



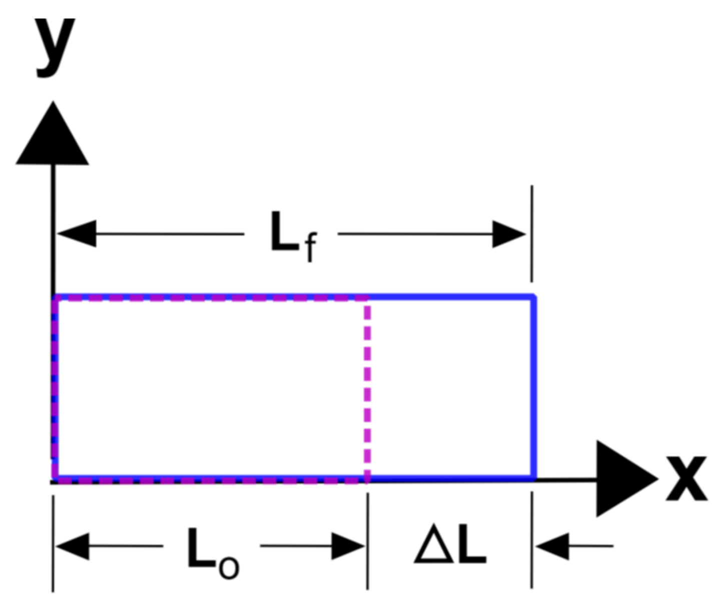
Namáhání tahem

Deformace

Poměrná (délková) deformace je chápána jako poměr změny délky ku její původní hodnotě.

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \text{ [-]}$$

$$\varepsilon_{skutečné} = \int_{L_0}^{L} \frac{dL}{L} = \ln \frac{L}{L_0} \text{ [-]}$$



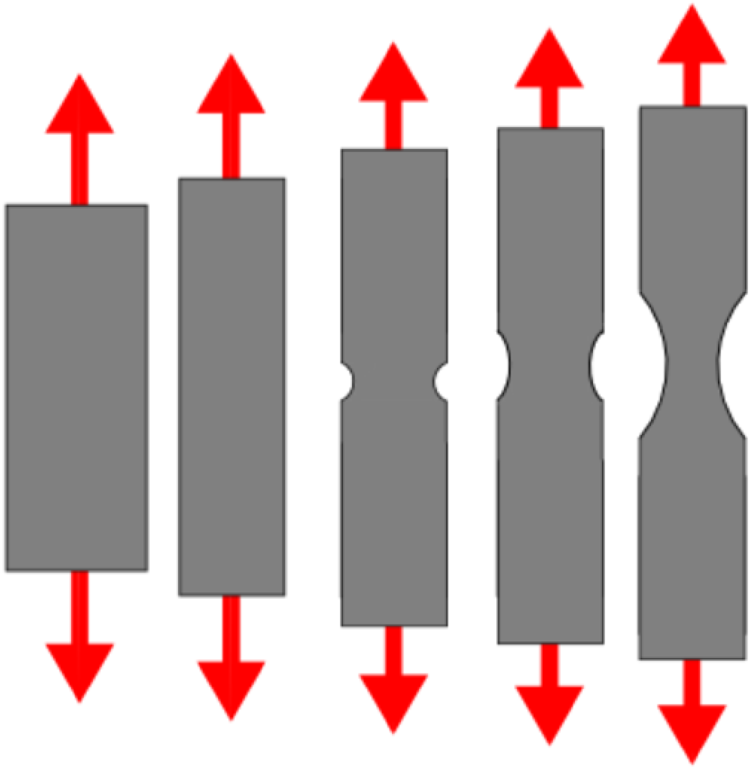
Namáhání tahem

Poissonovo číslo

$$\varepsilon_p = \frac{\Delta D}{D_0} \ [-]$$

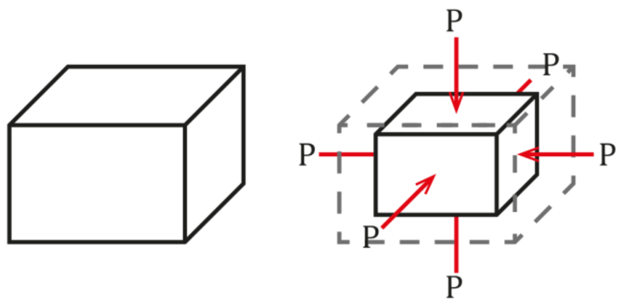
$$\varepsilon_p = -\mu \ \varepsilon$$

Material	*Poisson's ratio*
rubber	≈0.5
gold	0.42
saturated clay	0.40–0.50
magnesium	0.35
titanium	0.34
copper	0.33
aluminium-alloy	0.33
clay	0.30–0.45



Namáhání tahem-tlakem

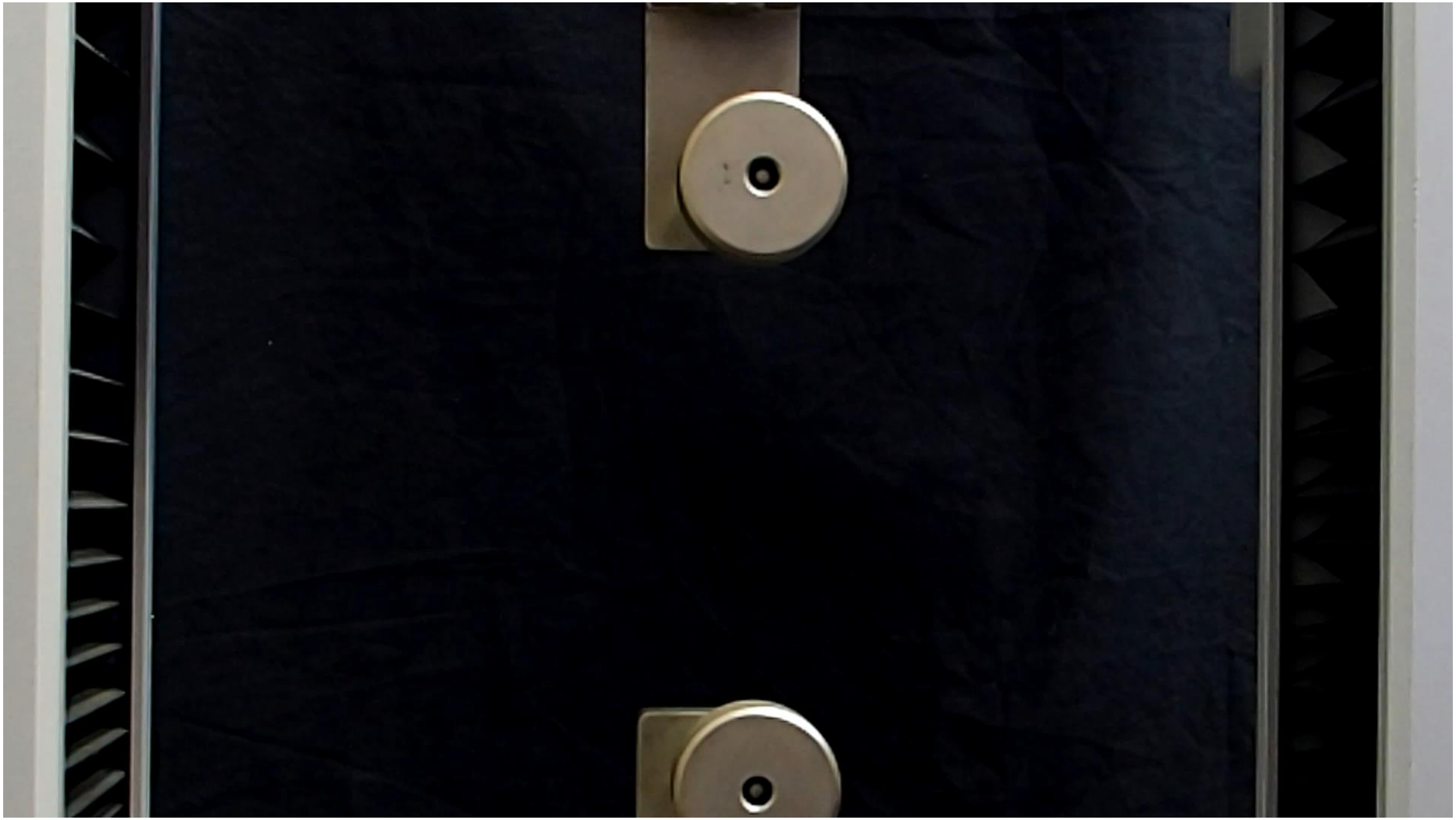
Objemový modul pružnosti (Bulk modulus)



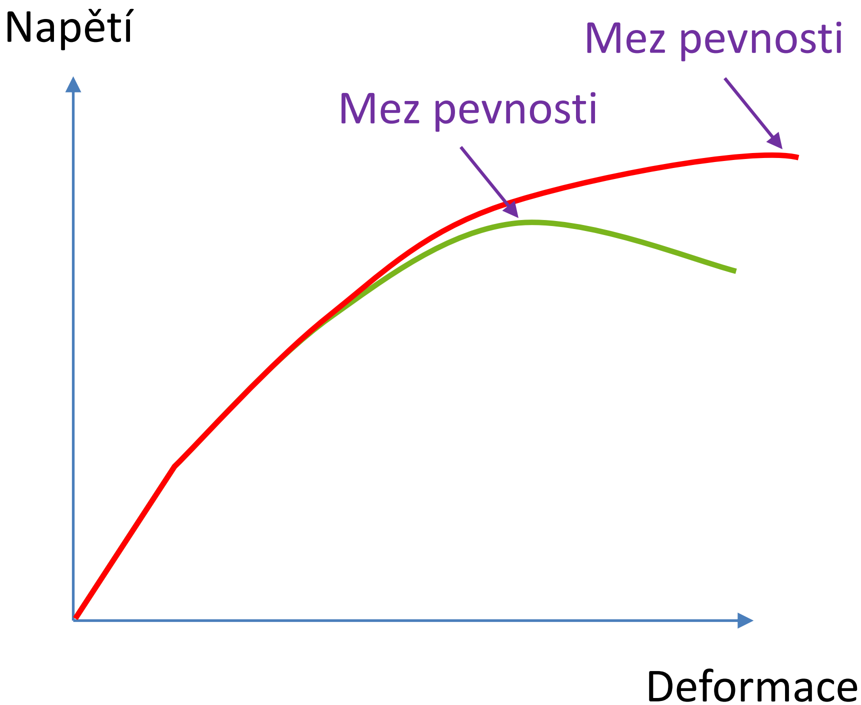
$$K = \frac{\frac{F}{S}}{-\frac{V_0}{\Delta V}} = -p\frac{V_0}{\Delta V}$$

Materiál	Objemový modul (GPa)
Pryž	1.5 to 2
Ocel	160
Diamant	443
Vápenec	65
Křída	9
Pískovec	0.7

Tahová zkouška



Pracovní diagram tahové zkoušky



Předpokládáme stejný objem:

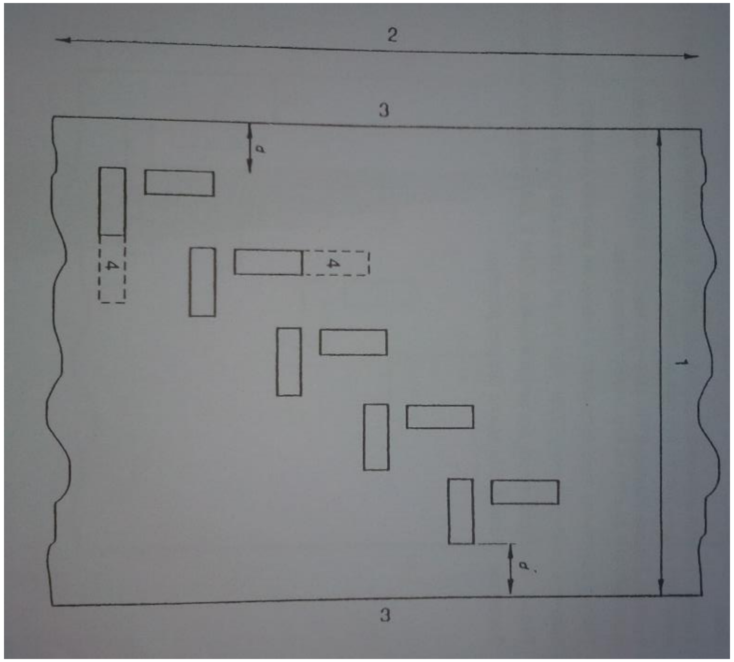
$$A_0 l_0 = Al$$

$$\sigma_{skutečné} = \sigma\,(1 + \varepsilon)$$

$$\varepsilon_{skutečné} = \ln\,(1 + \varepsilon)$$

ISO standardy v textilním inženýrství

1) Textiles — Tensile properties of fabrics — Part 1: Determination of maximum force and elongation at maximum force using the strip method – ISO 13934-1:2013
2) Textiles — Yarns from packages — Determination of single-end breaking force and elongation at break using constant rate of extension (CRE) tester – ISO 2062:2009



Specifika textilního inženýrství

$$\sigma = \frac{Fn}{S} \text{ [Pa]}$$

$$\sigma_{specifické} = \frac{Fn}{T} \text{ [N/tex]}$$

$$\sigma = \frac{\rho S L g}{S} \text{ [Pa]}$$

!

$$\sigma_{relativní} = \frac{\rho S L g}{\rho S}$$

$$\sigma = \rho L g \text{[Pa]}$$

$$\sigma_{relativní} = Lg$$

3 min pauza

$$\frac{1}{n}\sin x = \ ?$$

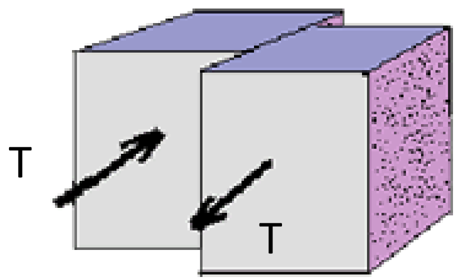
$$\frac{1}{\cancel{n}}\,\mathrm{si}\cancel{n}\,x = \ ?$$

$$six = 6 \ !$$

Tak takto ne!!!

Zdroj: Major-Word

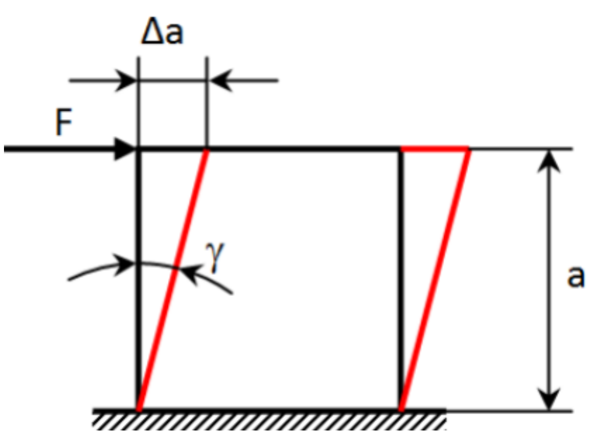
Namáhání smykem



$$\tau = \frac{T}{S}$$ [MPa] … smykové napětí

$\tau = \gamma$ G (Hookův zákon ve smyku)

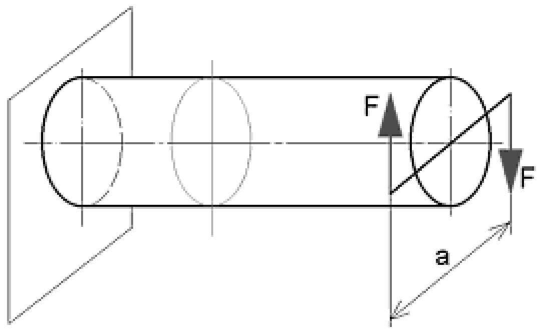
G … modul pružnosti ve smyku



$$tg\,\gamma = \gamma = \frac{\Delta a}{a}$$ … zkos

$$G = \frac{E}{2\,(1+\mu)}$$

Namáhání krutem



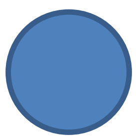
$\tau = \frac{M_k}{W_k}$ ...napětí v krutu [MPa]

Mk ... kroutící moment [Nm]
Wk ...průřezový modul v krutu [m3]

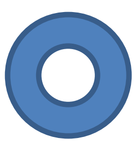
φ ... natočení [°]

ϑ ... zkrut [°/m]

Jp ... polární moment [m4]



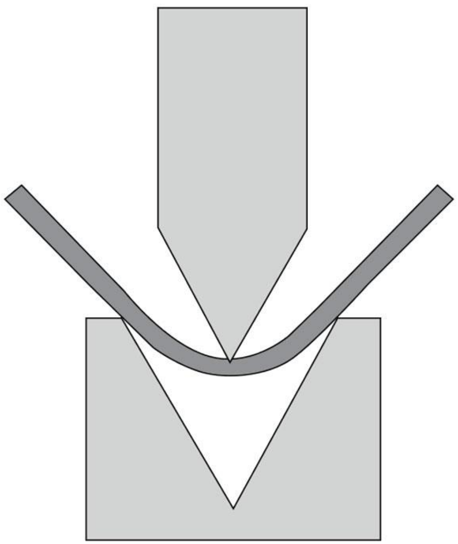
$$W_k = \frac{\pi D^3}{16} \qquad J_P = \frac{\pi D^4}{32}$$



$$\varphi = \frac{M_k l}{G\, J_p}$$

$$W_k = \frac{\pi D^3}{16}\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) \qquad J_p = \frac{\pi}{32}\left(D^4 - d^4\right)$$

Namáhání ohybem



$\sigma = \frac{M_o}{W_o}$ …napětí v ohybu [MPa]

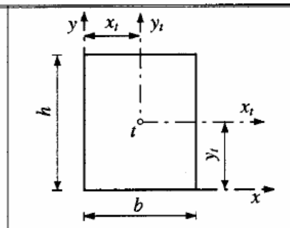
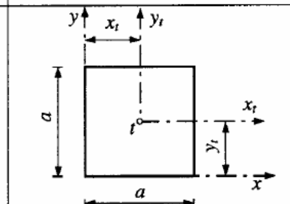
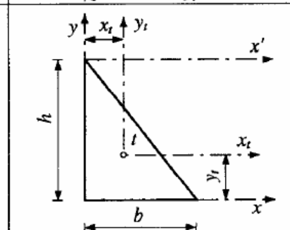
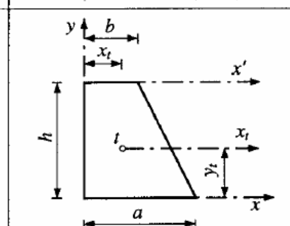
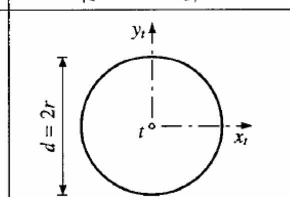
Mo … ohybový moment [Nm]
Wo …průřezový charakteristika v ohybu [m3]

Jp … kvadratický moment plochy[m4]

w … průhyb [mm]

$$w'' = -\frac{\mathrm{Mo}}{E\,J_y}$$

Namáhání ohybem

	Tvar obrazce	Obsah A, poloha těžiště t, momenty setrvačnosti I, polární I_t a deviační D
Obdélník		$A = bh;\quad x_t = \frac{b}{2};\quad y_t = \frac{h}{2}$ $I_{x_t} = \frac{1}{12}bh^3;\quad I_{y_t} = \frac{1}{12}hb^3;\quad I_x = \frac{1}{3}bh^3;\quad I_y = \frac{1}{3}hb^3$ $D_{xy} = \frac{b^2h^2}{4};\quad I_t = \frac{bh}{12}\left(b^2+h^2\right)$
Čtverec		$A = a^2;\quad x_t = y_t = \frac{a}{2}$ $I_{x_t} = I_{y_t} = \frac{a^4}{12};\quad I_x = I_y = \frac{a^4}{3}$ $D_{xy} = \frac{a^4}{4};\quad I_t = \frac{a^4}{6}$
Pravoúhlý trojúhelník		$A = \frac{1}{2}bh;\quad x_t = \frac{b}{3};\quad y_t = \frac{h}{3}$ $I_{x_t} = \frac{1}{36}bh^3;\quad I_{y_t} = \frac{1}{36}hb^3;\quad D_{x_ty_t} = -\frac{b^2h^2}{72}$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3;\quad I_y = \frac{1}{12}hb^3;\quad D_{xy} = \frac{b^2h^2}{24}$ $I_{x'} = \frac{1}{4}bh^3;\quad I_t = \frac{bh}{36}\left(b^2+h^2\right)$
Lichoběžník		$A = \frac{1}{2}(a+b)h;\quad x_t = \frac{a^2+ab+b^2}{3(a+b)};\quad y_t = \frac{(a+2b)h}{3(a+b)}$ $I_{x_t} = \frac{\left(a^2+4ab+b^2\right)h^3}{36(a+b)};\quad I_{x'} = \frac{(3a+b)h^3}{12}$ $I_x = \frac{(a+3b)h^3}{12};\quad D_{xy} = \frac{\left(a^2+2ab+3b^2\right)h^2}{24}$
Kruh		$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4};\quad I_{x_t} = I_{y_t} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$ $I_t = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$

Definice

Kontinuum

Představa spojitého prostředí nebo prostředí se spojitým rozložením hmoty.

Isotropie/anisotropie

Isotropní materiály mají ve všech směrech stejné vlastnosti.

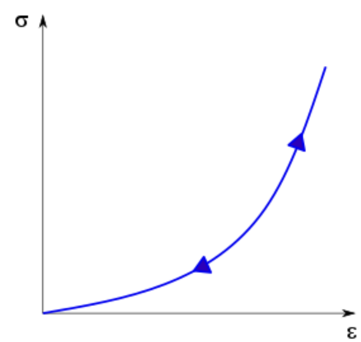
Homogenita/heterogenita

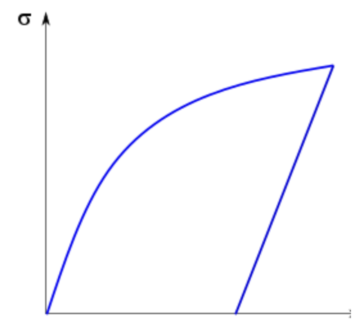
Homogenní materiály mají ve všech bodech tělesa stejné vlastnosti.

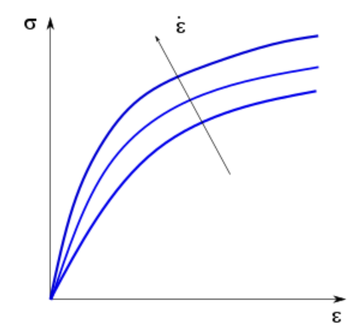
Materiálové modely

Homogenní materiály

- **Elastický**
- Plastický
- Visko-elastický
- Jiné

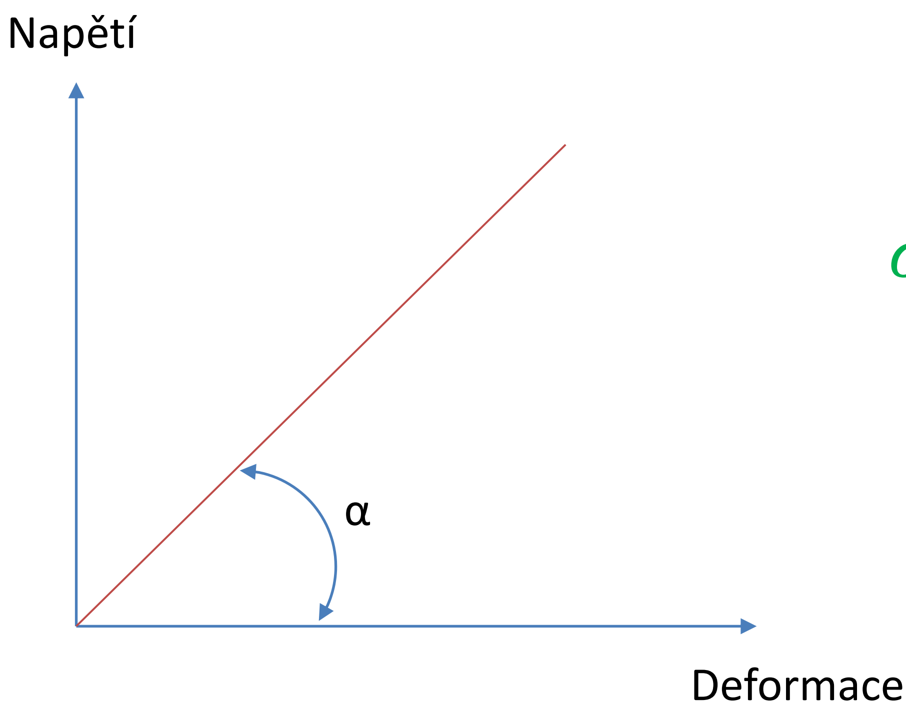






Materiálové modely

Lineárně elastický model



Tahová zkouška test

$$y = k\,x$$

$$\sigma = E\,\varepsilon\ (Hookeův\ zákon)$$

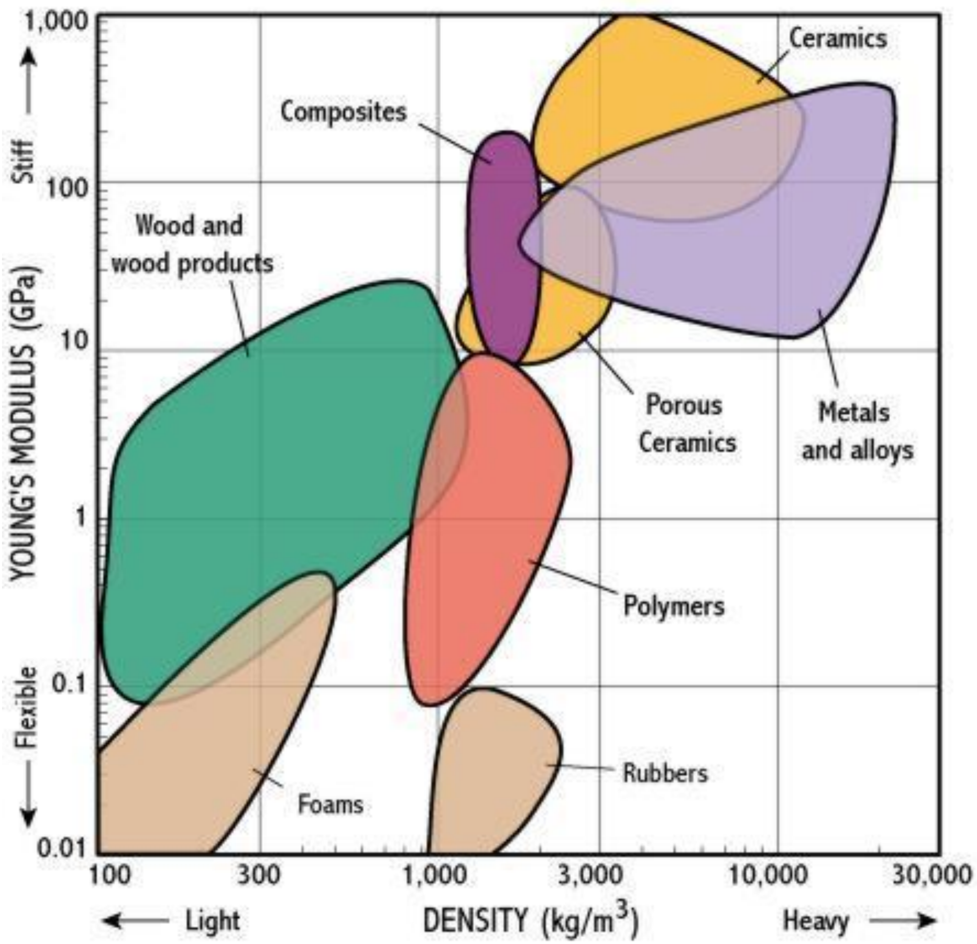
E= Modul pružnosti (Youngův modul)

E= tg α

Lineárně elastický model

https://www.grantadesign.com/education/students/charts/

Material	Youngs Modulus /GPa
Mild Steel	210
Copper	120
Bone	18
Plastic	2
Rubber	0.02



Materiálové modely

Viskoelastický model

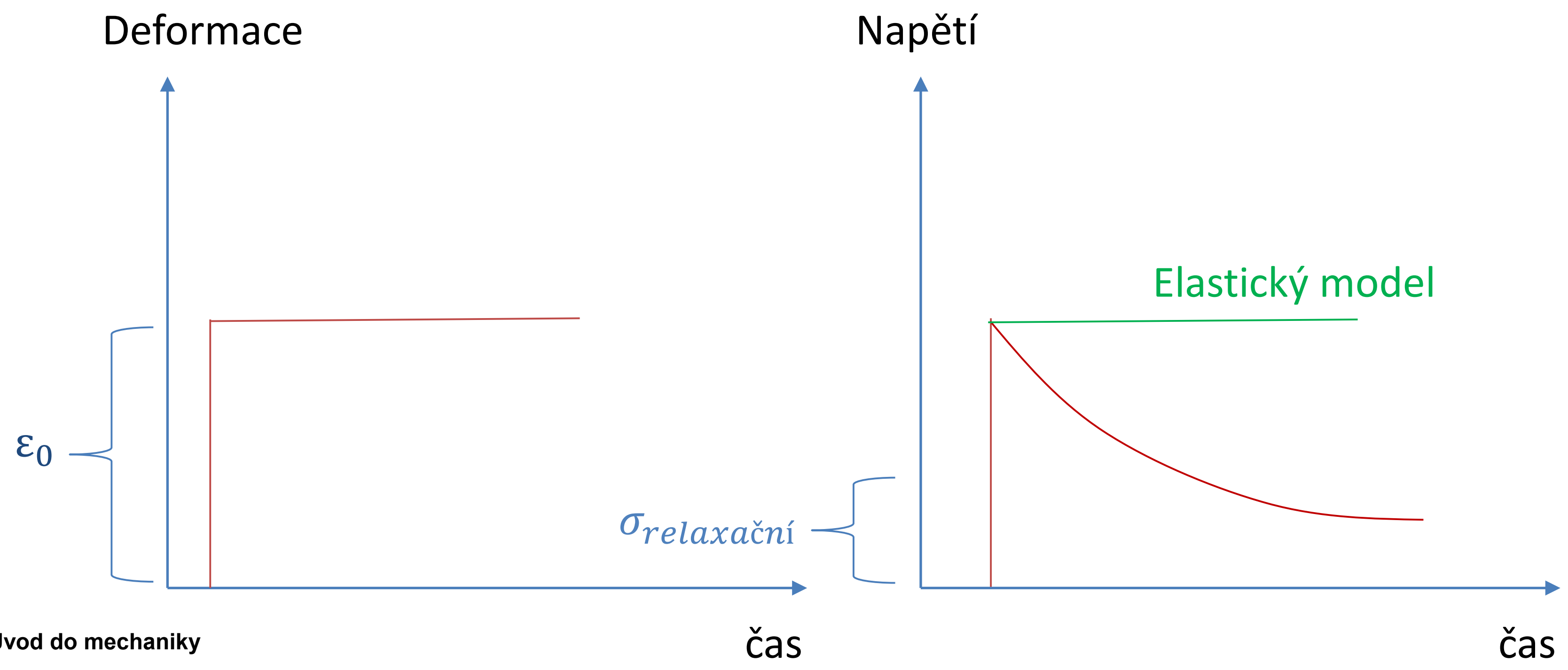
Viskoelastické chování je kombinací elastické a viskózní složky. Při zkoumání chování těchto materiálů je potřeba si uvědomit, že se jedná o časově závislé závislosti, které vykazují odlišné chování od elastických materiálů a to především následujícím chováním:

- **Relaxace napětí** – pokles napětí při konstantní deformaci. Relaxaci určujeme pomocí relaxačního modulu G(t).
- **Tečení -** změna deformace v závislosti na čase pří konstantním napětí.
- **Hystereze** – paměťový efekt materiálu.

Materiálové modely

Viskoelastický model

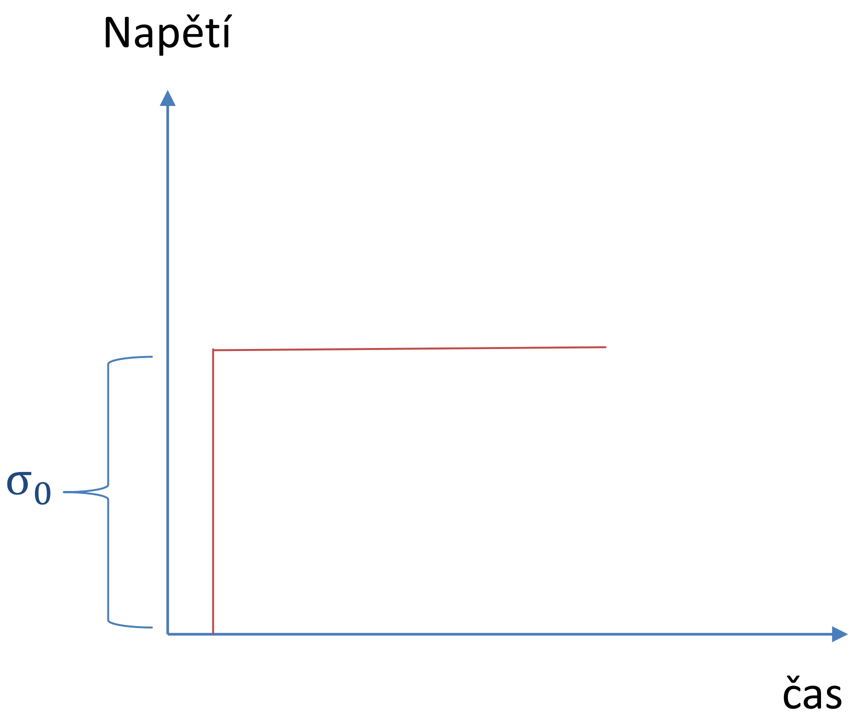
Relaxace napětí – pokles napětí při konstantní deformaci

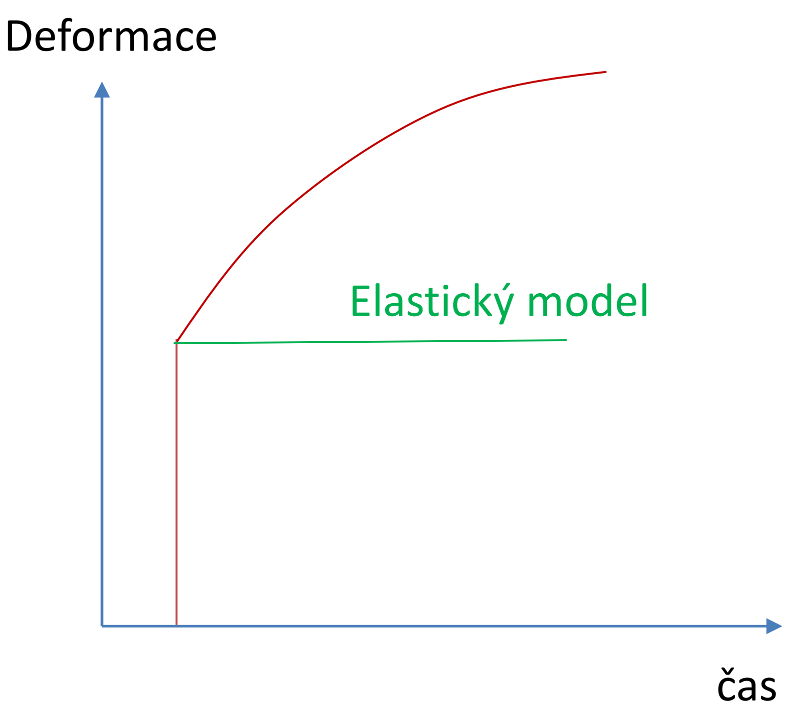


Materiálové modely

Viskoelastický model

- **Tečení (creep) -** změna deformace v závislosti na čase pří konstantním napětí.

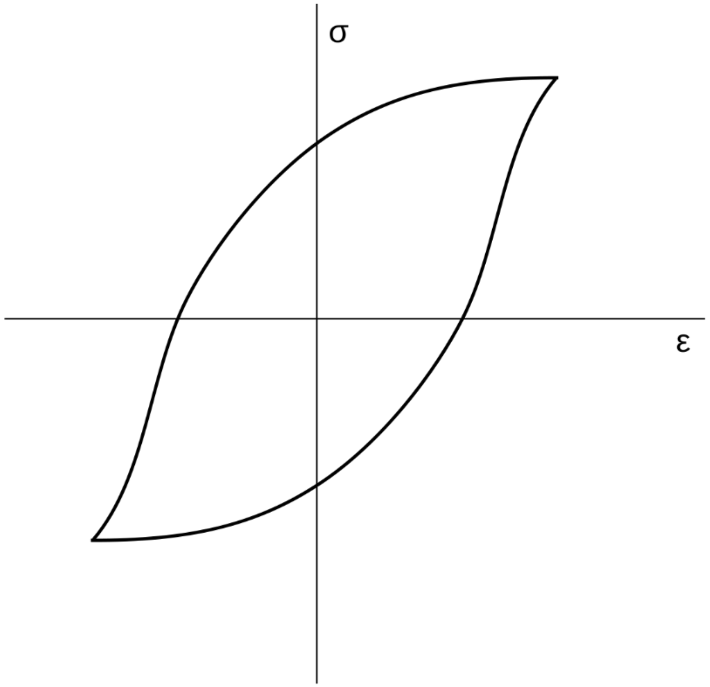




Materiálové modely

Viskoelastický model

- **Hystereze** – paměťový efekt materiálu



Materiálové modely

Viskoelastický model

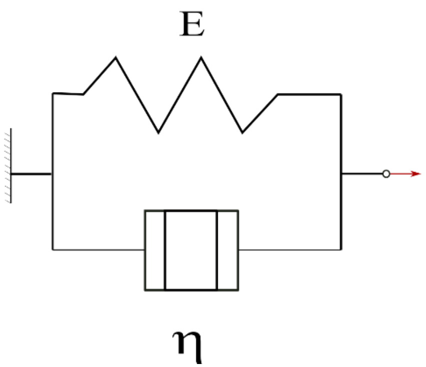
Matematický popis chování těchto materiálů zpravidla vyjadřujeme pomocí **reologických modelů**. Tyto modely popisují chování materiálů na pomezí pevné a kapalné látky.

V případě lineárního chování (Newtonovská kapalina) můžeme psát pro viskozní složku následující konstitutivní vztah:

$\sigma = E\,\varepsilon\ (elastický - pružina)$ $\quad \sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}\ (viskozní - tlumič)$

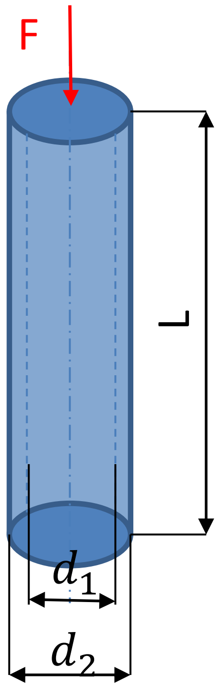
Maxwelův model

Kelvin-Voigtův model



Mezi základní reologické modely patří **Maxwellův** model a **Kelvin-Voigtův** model. Maxwellův model je tvořen seriově zapojenou pružinou (elastický model) a tlumičem.

P13: Namáhání tahem-tlakem



Zadání:
Kovová trubka (s modulem pružnosti E a Poissonovým číslem μ) o délce L, vnějším průměru d2 a vnitřním průměru d1 je stlačována osovou silou F.
Vypočítejte: Stlačení trubky (δ), příčnou deformaci (εp), změnu průměrů d1 a d2, změnu tloušťky (t) a změnu objemu.

$$S = \frac{\pi}{4}\left(d_2^2 - d_1^2\right)$$

$$\sigma = -\frac{F}{S}$$

$$\sigma = E\varepsilon$$

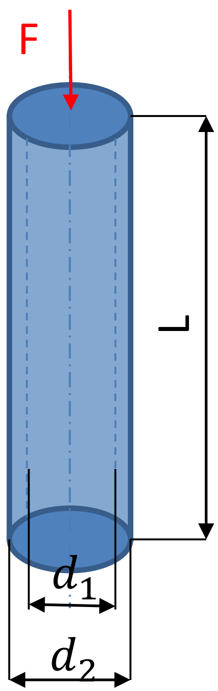
$$-\frac{F}{S} = E\varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = -\frac{F}{SE}$$

$$\boxed{\delta = \varepsilon L = -\frac{FL}{SE}}$$

$$\boxed{\varepsilon_p = -\mu\varepsilon = \mu\frac{F}{SE}}$$

P13: Namáhání tahem-tlakem



Zadání:
Kovová trubka (s modulem pružnosti E a Poissonovým číslem μ) o délce L, vnějším průměru d2 a vnitřním průměru d1 je stlačována osovou silou F.
Vypočítejte: Stlačení trubky (δ), příčnou deformaci (εp), změnu průměrů d1 a d2, změnu tloušťky (t) a změnu objemu.

$$\boxed{\Delta d_2 = \varepsilon_p d_2}$$

$$\boxed{\Delta d_1 = \varepsilon_p d_1}$$

$$\boxed{\Delta t = \varepsilon_p t}$$

$$\boxed{\Delta V = V_0 \varepsilon (1 - 2\mu)}$$

Deformační energie

Pokud je těleso zatěžováno kvazistaticky, pak lze zanedbat kinetickou složku energie. Je-li těleso z materiálu ideálně elastického, pak je možno zanedbat ztráty vlivem vnitřního tření a lze prohlásit, že veškerá **práce vnějších zatížení** W $[J]$ se přemění v **deformační energii** U $[J]$, akumulovanou v tělese. Pro výslednou práci na diferenciálu objemu dxdydz = dV platí

$$dW = dU = \int_0^{\varepsilon} \sigma \, d\varepsilon \, dxdydy = \int_0^{\varepsilon} \sigma \, d\varepsilon \, dV$$

Deformační energie vztažená na jednotkový objem – **hustota deformační energie** Uo

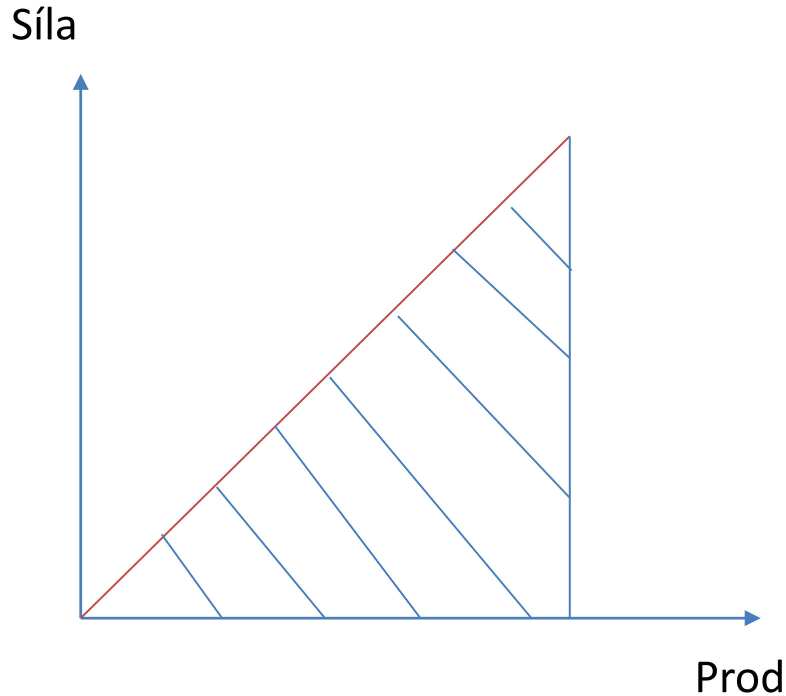
$$dU_0 = \frac{dU}{dV} = \int_0^{\varepsilon} \sigma \, d\varepsilon$$

Deformační energie (tah-tlak)

Deformační energie = práce vykonaná = plocha pod pracovním diagramem

Pro lineárně elastický materiál:

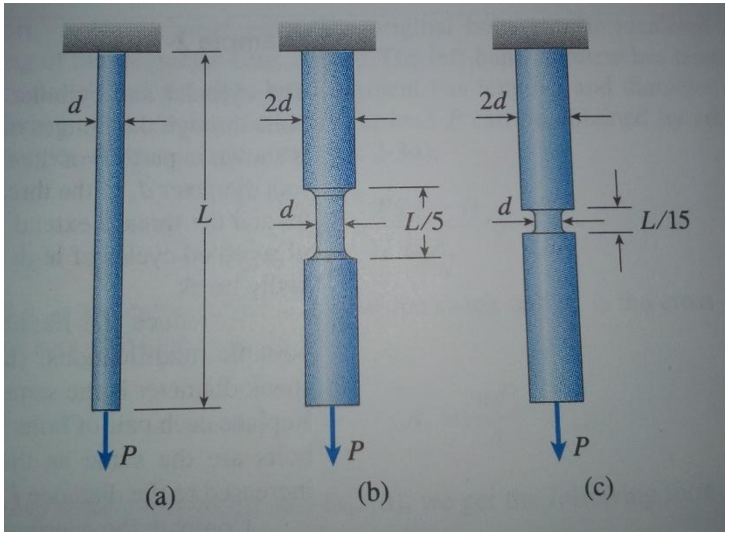
W=U=$\frac{F \cdot \Delta l}{2}$ → $\Delta l = \frac{Nl}{ES}$ → $\boxed{U = \frac{N^2 l}{2ES}}$



$$\boxed{U = \int_0^L \frac{N_{(x)}^2}{2ES} dx}$$

P14: Deformační energie

Zadání: Vypočtete deformační energii pro tři geometricky rozdílné zkušební tělesa zatížené tahem



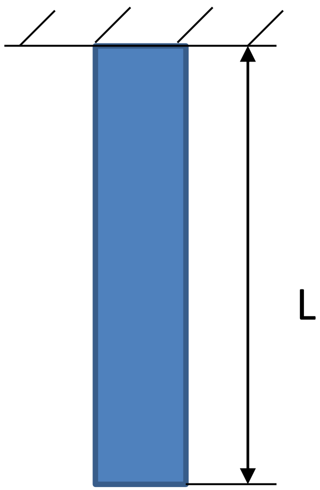
$$a) \quad U_1 = \frac{P^2 L}{2ES}$$

$$b) \quad U_2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{{P_i}^2 L_i}{2E_i S_i} = \frac{P^2\left(\frac{1}{5}\right)L}{2ES} + \frac{P^2\left(\frac{4}{5}\right)L}{2E(4)S} = \frac{2}{5} U_1$$

$$c) \quad U = \sum_{i=1}^{3} \frac{{P_i}^2 L_i}{2E_i S_i} = \frac{P^2\left(\frac{1}{15}\right)L}{2ES} + \frac{P^2\left(\frac{14}{15}\right)L}{2E(4)S} = \frac{3}{10} U_1$$

P15: Deformační energie

Zadání: Vypočtete deformační energii pro lano zatížené vlastní vahou. Dáno: ρ, S, E, L



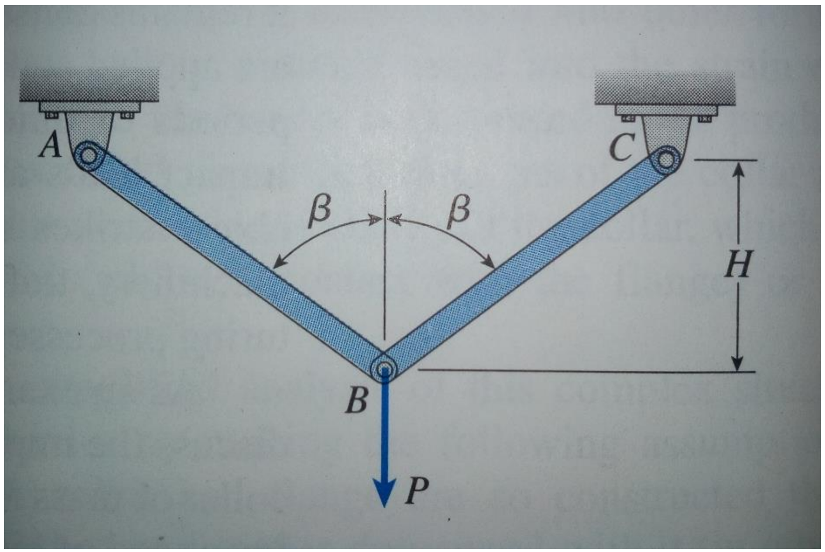
$$N(x) = \rho\, S\, (L - x)$$

$$U = \int_0^L \frac{N_{(x)}^2}{2ES}\, dx = \int_0^L \frac{\rho\, S\, (L - x)}{2ES}\, dx$$

$$\boxed{U = \frac{\rho^2 A L^3}{6A}}$$

P16: Deformační energie

Zadání: Vypočtete svislý posuv bodu B. Dáno: P, S, E, H, β



$$F = \frac{P}{2cos\beta}$$

$$U = 2\frac{F^2 L_1}{2ES} = \frac{P^2 H}{4EScos^3\beta}$$

$$W = U = \frac{P \cdot \delta_B}{2}$$

$$\boxed{\delta_B = \frac{PH}{2EScos^3\beta}}$$

Castigliánova větq

Posuv v určitém místě pružného, dokonale uloženého tělesa je dán parciální derivací celkové deformační energie tělesa podle síly, působící v místě a ve směru hledaného posuvu

$$u_i = \frac{\partial U}{F_i}$$

Úhel natočení v místě působení momentu silové dvojice M v rovině jeho působení je dán parciální derivací celkové deformační energie tělesa podle momentu silové dvojice M

$$\varphi_i = \frac{\partial U}{M_i}$$

Použitá literatura

- **http://solidmechanics.org**
- http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/pruznost_pevnost_obraz.pdf
- www.axelproducts.com

Případné chyby v prezentaci zasílejte na: lukas.capek@tul.cz

Děkuji!