Řešení soustav lineárních alg. rovnic – Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ x+2y+3z &= 6 \\ 3x-y-z &= 1 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Sčítací metoda $\longrightarrow$ **elementární úpravy matice**

Sčítací metoda:

1) změna pořadí rovnic
2) vynásobení rovnice nenulovou konstantou
3) přičtení násobku rovnice k jiné rovnici

Elementární úpravy matice:

1) výměna řádků
2) vynásobení řádku nenulovou konstantou
3) přičtení násobku řádku k jinému řádku
4) vyškrtnutí nulového řádku

$$\begin{matrix}(-1)\\ \\ \\ \end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\1&2&3&6\\3&-1&-1&1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\\boxed{0}&1&2&3\\3&-1&-1&1\end{array}\right]\begin{matrix}(-3)\\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&2&3\\0&-4&-4&-8\end{array}\right]\begin{matrix}\\(4)\\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&2&3\\0&0&4&4\end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{rcl} x+y+z=3 & \rightarrow & x=1\\ -\; y+2z=3 & \rightarrow & y=1\\ -\;-\; 4z=4 & \rightarrow & \underline{\underline{z=1}}\end{array}$$

<u>Odstupňovaný tvar</u>: každý další řádek matice obsahuje alespoň o jednu nulu víc v souvislé řadě nul od začátku řádku do 1. nenulového čísla než předchozí řádek. Matice neobsahuje nulové řádky.

<u>Vytváříme systematicky</u>!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \end{array}\right] (-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim$$

I.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{aligned} x \quad + \quad z &= 4 \\ y + 2z &= 8 \\ 3z &= 9 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= 1 \quad 3. \\ y &= 2 \quad 2. \\ z &= 3 \quad 1. \end{aligned}$$

II.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right] \sim$$

(-1), (-2), (-1)

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$x + 2y + 3z = 1$$
$$-y - 2z = 2$$
$$\boxed{0 = 1} \rightarrow \underline{\text{Soustava nemá řešení}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 6 & 0 \\ 3 & 8 & 5 & 9 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c}(-1)\\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c}(-3)\\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ (-1) \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ (-2) \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} a + 2b + c + 3d &= 0 \\ b + c &= 0 \end{aligned}$$

má ∞ řešení

$$\boxed{\begin{aligned} c &= t \ (t \in \mathbb{R}) \\ b &= -t \\ d &= s \ (s \in \mathbb{R}) \\ a &= 2t - t - 3s = t - 3s \end{aligned}}$$

Homogenní soustava – na pravé straně nuly

– v maticovém zápisu se nuly nepíšou:

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ místo } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

– homogenní soustava má vždy řešení

– univerzální řešení: všechny neznámé $= 0$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 2 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ \underline{0} & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 2 & 11 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{4} \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{2} & \cancel{8} \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \end{array}$$

$$a + b + c = 3$$
$$b + c + 2d + e = 4$$

$e = t \ (t \in \mathbb{R})$

$d = s \ (s \in \mathbb{R})$

$c = r \ (r \in \mathbb{R})$

$b = 4 - r - 2s - t$

$a = 3 - (4 - r - 2s - t) - r =$

$= -1 + 2s + t$

např.: $r = s = t = 0$

$c = d = e = 0, \ b = 4, \ a = -1$ ✓