Soustavy lineárních rovnic

Nechť A je matice typu $m \times n$ reálných čísel, $\vec{x}$ je jednosloupcová matice typu $n \times 1$ symbolů (tzv. neznámých) $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ a $\vec{b}$ je jednosloupcová matice typu $m \times 1$ reálných čísel $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$. Maticovou rovnost

$\boxed{A \cdot \vec{x} = b}$ nazýváme soustavou m lineárních alg. rovnic pro n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 2 \\ x + 2y + 3z &= 0 \end{aligned} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

rozšířená matice soustavy

matice soustavy

Homogenní soustava

$$a - b + c + 2d = 0$$
$$c - d = 0$$

$d = t \quad (t \in \mathbb{R})$

$c = t$

$b = s \quad (s \in \mathbb{R})$

$a = s - t - 2t = s - 3t$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-3t \\ s \\ t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3t \\ 0 \\ t \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Všechna řešení naší soustavy získáme jako množinu všech lin. kombinací vektorů $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ a $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Protože vektory jsou dva, říkáme, že řešení má dimenzi 2.

$$a + b + c + d + e = 0$$
$$b - 2c + e = 0$$

$$e = t \quad (t \in \mathbb{R})$$
$$c = s \quad (s \in \mathbb{R})$$
$$b = 2s - t$$
$$d = r \quad (r \in \mathbb{R})$$
$$a = t - 2s - s - r - t = -3s - r$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3s - r \\ 2s - t \\ s \\ r \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3s \\ 2s \\ s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -t \\ 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} =$$

$$= s \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Řešení má dimenzi 3 (máme 3 vektory)

Nehomogenní soustava

$$a - b + c + 2d = 1$$
$$c - d = 0$$

$$d = \cancel{s}\, t \quad (t \in \mathbb{R})$$
$$c = t$$
$$b = s \quad (s \in \mathbb{R})$$
$$a = 1 + s - 3t$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+s-3t \\ s \\ t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3t \\ 0 \\ t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a+b+c+d+e &= 2 \\ b-2c+e &= 1 \end{aligned}$$

$e = t \ (t \in \mathbb{R})$

$c = s \ (s \in \mathbb{R})$

$b = 1+2s-t$

$d = r \ (r \in \mathbb{R})$

$a = 2-1-2s+t-s-r-t = 1-3s-r$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3s-r \\ 1+2s-t \\ s \\ r \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$