

Nalezněte vlastní čísla a vl. vektory:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

1) vlastní čísla - charakteristická rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 5 \end{array} \right.$$

2) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ hledáme vl. vektory příslušné vl. č. $\lambda_1 = 2$.

$$(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$(A - 2E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2x + y = 0$$

$$x = t \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$y = -2t$$

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} t \\ -2t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{representant}} \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Zk

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \underline{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$

3) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ hledáme vl-vectory pro $\lambda_2 = 5$

$$(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$(A - 5E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-x + y = 0$$

$$x = y = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

zk. $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1) char. rovnice

$$\det(B - \lambda E) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 3$$

2) vektorový:

$$(B - 3E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Osvědčíme pro nesmírné $x, y \rightarrow x = t \ (t \in \mathbb{R})$

$y = s \ (s \in \mathbb{R})$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2 vektorů reprezentanty

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

1) charakteristická rovnice $\det(C - \lambda E) = 0$

$$\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)^2 - (-4) = 0$$

$$9 - 6\lambda + \lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} =$$

$$= 3 \pm 2i$$

$$\lambda_1 = 3 + 2i$$

$$\lambda_2 = 3 - 2i$$

$$\begin{matrix} 2 \\ \dot{N} = -1 \end{matrix}$$

$$\sqrt{-16} = \sqrt{16 \cdot (-1)} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1}$$

$$4i$$

2) vlastní vektor matice $C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ pro $\lambda_1 = 3 + 2i$

$$(C - \lambda E) \cdot \vec{X} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 3 - (3 + 2i) & -2 \\ 2 & 3 - (3 + 2i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2i & -2 \\ 2 & -2i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2i \cdot x - 2y = 0$$

$$y = -ix$$

$$x = t \quad (t \in \mathbb{C})$$
$$y = -it$$

(1. řádek $\times i =$ 2. řádek)

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} t \\ -it \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 24 & -7 & -29 \\ 8 & -1 & -11 \\ 16 & -5 & -19 \end{bmatrix}$$

1) char. rovnice $\det(D - \lambda E) = 0$

$$\det \begin{bmatrix} 24-\lambda & -7 & -29 \\ 8 & -1-\lambda & -11 \\ 16 & -5 & -19-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{matrix} 24-\lambda & -7 & -29 \\ 8 & -1-\lambda & -11 \\ 16 & -5 & -19-\lambda \end{matrix}$$

$$0 = (24-\lambda)(-1-\lambda)(-19-\lambda) + 1160 + 1232 - [-464(-1-\lambda) + 55(24-\lambda) - 56(-19-\lambda)]$$

$$0 = (24-\lambda)(-1-\lambda)(-19-\lambda) + 2392 - (2848 + 465\lambda)$$

$$0 = (-24 - 24\lambda + \lambda + \lambda^2)(-19-\lambda) - 456 - 465\lambda$$

$$0 = \cancel{456} + \underline{24\lambda} + \underline{456\lambda} + \underline{24\lambda^2} - \underline{19\lambda} - \underline{\lambda^2} - \underline{19\lambda^2} - \underline{\lambda^3} - \cancel{456} - 465\lambda$$

$$0 = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda$$

$$D = \begin{bmatrix} 24 & -7 & -29 \\ 8 & -1 & -11 \\ 16 & -5 & -19 \end{bmatrix}$$

ch.r. $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda = 0$
 $-\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0$
 $-\lambda(\lambda - 2)^2 = 0$

\swarrow \downarrow
 $\lambda_1 = 0$ $\lambda_{2,3} = 2$

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}t \\ t \\ t \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2) N. vektor pro $\lambda_1 = 0$: $(D - 0E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} 24 & -7 & -29 \\ 8 & -1 & -11 \\ 16 & -5 & -19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 24x - 7y - 29z &= 0 \\ y - z &= 0 \\ y = z &= t \quad (t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 24 & -7 & -29 \\ (-3) & 8 & -1 & -11 \\ (-3) & 16 & -5 & -19 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 24 & -7 & -29 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 24x &= 7t + 29t \\ 24x &= 36t \\ x &= \frac{36}{24}t = \frac{3}{2}t \end{aligned}$$

3) Vektorraum für $\lambda_{23} = 2$

$$(D - 2E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} -8 \begin{bmatrix} 22 & -7 & -29 \\ 8 & -3 & -11 \\ 16 & -5 & -21 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (-4) \\ 11 \\ \leftarrow \end{array} \sim \begin{bmatrix} 22 & -7 & -29 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$22x - 7y - 29z = 0$$

$$y + z = 0$$

$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$z = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$y = -\lambda$$

$$22x = -7\lambda + 29\lambda = 22\lambda$$

$$x = \lambda$$