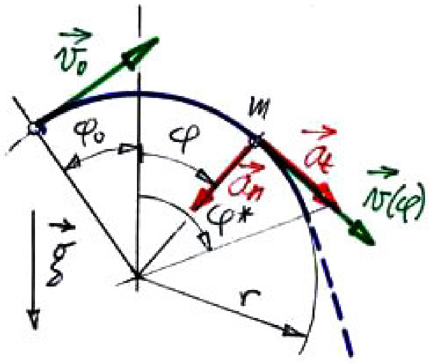
Pohyb hmotného bodu po podpůrné válcové ploše

Hmotný bod dané hmotnosti se pohybuje po vnější drsné straně horizontální válcové plochy v radiální rovině z dané výchozí polohy danou počáteční rychlostí.



obr. 1 – Zadání

<u>Dáno:</u> - hmotnost m hmotného bodu,

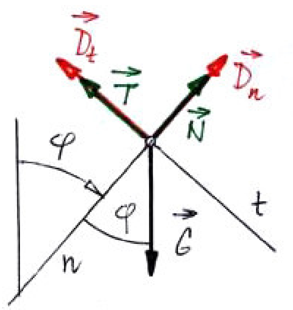
- výchozí poloha φ_0,
- počáteční rychlost v_0,
- poloměr r válcové plochy,
- součinitel smykového tření f na válcové ploše.

<u>Určit:</u> - závislost $v(\varphi)$ rychlosti na poloze,

- pro speciální případ $f = 0$ (bez tření) určit místo φ^* ztráty kontaktu hmotného bodu s podložkou.

<u>Postup řešení:</u>

1) Uvolnění hmotného bodu v obecné poloze obsahuje akční sílu $\vec{G}$ (tíhová síla), normálovou reakci $\vec{N}$, tečnou třecí sílu $\vec{T}$ působící proti pohybu a dynamickou tečnou $\vec{D}_t$ a normálovou $\vec{D}_n$ složku setrvačné síly – viz obr. 2.



obr. 2 – uvolnění v obecné poloze

2) Rovnice dynamické rovnováhy: Vektorovou rovnici rovnováhy

$$\vec{G} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{D}_n + \vec{D}_t = \vec{0}$$

rozepíšeme ve složkách souřadnicového systému tečna-normála

$$\searrow t: \quad G\sin\varphi - T - D_t = 0\,, \tag{1}$$

$$\nearrow n: \quad G\cos\varphi - N - D_n = 0\,, \tag{2}$$

3) Specifikace sil

$$G = mg\,, \tag{3}$$

$$T = fN\,, \tag{4}$$

$$D_t = ma_t\,, \tag{5}$$

$$D_n = ma_n\,. \tag{6}$$

4) Kinematické rovnice: Protože se požaduje závislost rychlosti na poloze musíme použít diferenciální výraz, který obsahuje v a φ. Tím je

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{r\mathrm{d}\varphi}{r\mathrm{d}\varphi} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}\frac{r\mathrm{d}\varphi}{r\mathrm{d}t} = \frac{v}{r}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}\,, \tag{7}$$

nebo můžeme postupovat takto:

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}\dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}\omega$$

a vzhledem k tomu, že pro obvodovou rychlost při pohybu po kružnici platí $v = \omega r$, dostáváme

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}\frac{v}{r}.$$

Pro normálovou složku zrychlení platí

$$a_n = \frac{v^2}{r}. \tag{8}$$

5) Inventura rovnic a neznámých. Rovnic je 8, Neznámých je 9 (G, T, D_t, D_n, N, a_t, a_n, v, φ), přičemž φ je nezávislou proměnnou.

6) Řešení: Dosazením rovnic (3) až (6) do rovnic (1) a (2) dostaneme

$$mg\sin\varphi - fN - ma_t = 0\,, \tag{9}$$

$$mg\cos\varphi - N - ma_n = 0\,. \tag{10}$$

Z (10) vypočteme N a dosadíme do (9)

$$mg\sin\varphi - f\left(mg\cos\varphi - ma_n\right) - ma_t = 0\,,$$

krátíme hmotností a dosadíme za a_t a a_n.

$$\frac{v}{r}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi} - f\frac{v^2}{r} = g\sin\varphi - fg\cos\varphi\,. \tag{11}$$

Zavedením substituce (a drobnými úpravami)

$$v^2 = z, \quad 2v\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}z\,, \tag{12}$$

se tato rovnice převede na lineární diferenciální rovnici prvního řádu s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi} - 2fz = 2rg\sin\varphi - 2frg\cos\varphi\,. \tag{13}$$

Řešení takovéto rovnice se skládá z obecného řešení $z_H(\varphi)$ homogenní rovnice

$$\frac{\mathrm{d}z_H}{\mathrm{d}\varphi} - 2fz_H = 0\,, \tag{14}$$

též možno zapsat pomocí notace známé z matematiky

$$z_H{}' - 2fz_H = 0\,,$$

a z partikulárního řešení $z_P(\varphi)$ pro daný tvar pravé strany.

Řešení rovnice (14) je ve tvaru

$$z_H = Ce^{\lambda\varphi}\,,$$

kde λ je kořenem charakteristického polynomu (řešením charakteristické rovnice)

$$\lambda - 2f = 0\,, \tag{15}$$

s řešením $\lambda = 2f$, takže obecné řešení homogenní rovnice (14) je

$$z_H = Ce^{2f\varphi}\,, \tag{16}$$

kde C je integrační konstanta.

Speciální pravá strana rovnice (13) obsahuje sinus i cosinus nezávisle proměnné, oba s konstantními koeficienty. Srovnáním s nejobecnějším možným tvarem speciální pravé strany

$$\mathrm{P.\,S.} = e^{a\varphi}\left[P_n(\varphi)\cos b\varphi + Q_n(\varphi)\sin b\varphi\right],$$

vychází $a=0$, $b=1$ a stupeň polynomů P_n i Q_n je $n=0$. Protože číslo $a+ib$ není kořenem rovnice (15), je očekávaný tvar partikulárního integrálu (partikulárního řešení)

$$z_P(\varphi) = R_0\cos\varphi + S_0\sin\varphi, \tag{17}$$

kde R_0 a S_0 jsou polynomy stupně $n=0$, tedy konstanty. Dosazení tohoto vztahu do rovnice (13) (za $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi}$ dosadíme derivaci (17) podle φ) dává

$$\left[-R_0\sin\varphi + S_0\cos\varphi\right] - 2f\left[R_0\cos\varphi + S_0\sin\varphi\right] = 2rg\sin\varphi - 2frg\cos\varphi,$$

a po úpravě dostáváme rovnici

$$(-R_0 - 2fS_0)\sin\varphi + (S_0 - 2fR_0)\cos\varphi = 2rg\sin\varphi - 2frg\cos\varphi,$$

z níž porovnáním členů u $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$ dostáváme dvě lineární algebraické rovnice

$$\begin{aligned} R_0 + 2fS_0 &= -2rg,\\ 2fR_0 - S_0 &= 2frg, \end{aligned}$$

pro R_0 a S_0. Řešení například Cramerovým (viz např. wikipedie) pravidlem dává

$$R_0 = \frac{\begin{vmatrix} -2gr & 2f \\ 2fgr & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2f \\ 2f & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{1-2f^2}{1+4f^2}\cdot 2gr,$$

$$S_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2gr \\ 2f & 2fgr \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2f \\ 2f & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{6fgr}{1+4f^2}.$$

Partikulární řešení (partikulární integrál) je potom

$$z_P = \frac{2gr}{1+4f^2}\left[\left(2f^2-1\right)\cos\varphi - 3f\sin\varphi\right]$$

a obecné řešení úplné rovnice (13)

$$z(\varphi) = Ce^{2f\varphi} - \frac{2gr}{1+4f^2}\left[3f\sin\varphi + \left(1-2f^2\right)\cos\varphi\right], \tag{18}$$

kde stále potřebujeme určit integrační konstantu C, která se určí aplikací počáteční podmínky (viz zadání úlohy) $\varphi = -\varphi_0$, $v(\varphi = -\varphi_0) = v_0$, tedy

$$z(\varphi = -\varphi_0) = \left[v(\varphi = -\varphi_0)\right]^2 = v_0^2. \tag{19}$$

Dostáváme

$$z(-\varphi_0) = v_0^2 = Ce^{-2f\varphi_0} - \frac{2gr}{1+4f^2}\left[3f\sin(-\varphi_0) + \left(1-2f^2\right)\cos(-\varphi_0)\right],$$

tedy po úpravě (kde aplikujeme známé vlastnosti goniometrických funkcí $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$, $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$)

$$C = e^{2f\varphi_0}\left\{v_0^2 + \frac{2gr}{1+4f^2}\left[\left(1-2f^2\right)\cos\varphi_0 - 3f\sin\varphi_0\right]\right\}.$$

Po dosazení do (18) a úpravách je řešení rovnice (13) při počáteční podmínce (19)

$$z = v^2(\varphi) = \ v_0^2 e^{2f(\varphi+\varphi_0)} + \frac{2gr}{1+4f^2}\Big[\big(1-2f^2\big)\big(e^{2f(\varphi+\varphi_0)}\cos\varphi_0 - \cos\varphi\big) - \\ -3f\left(e^{2f(\varphi+\varphi_0)}\sin\varphi_0 + \sin\varphi\right)\Big], \qquad (20)$$

---

což je vlastně požadovaná závislost $v(\varphi)$.

Normálovou reakci N lze potom určit z rovnice z rovnice (10)

$$N = m\left(g\cos\varphi - \frac{v^2}{r}\right),$$

neboli

$$N(\varphi) = m\left\{g\cos\varphi - \frac{v_0^2}{r}e^{2f(\varphi+\varphi_0)} - \right. \\ \left. - \frac{2gr}{1+4f^2}\Big[\big(1-2f^2\big)\big(e^{2f(\varphi+\varphi_0)}\cos\varphi_0 - \cos\varphi\big) - 3f\left(e^{2f(\varphi+\varphi_0)}\sin\varphi_0 + \sin\varphi\right)\Big]\right\}.$$

<u>Ztráta kontaktu</u> s podložkou nastává, když $N = 0$. Obecný případ pro $f \neq 0$ je řešení velmi obtížné. Pro speciální případ $f = 0$ (bez tření) je

$$N(\varphi) = m\Big[g\cos\varphi - v_0^2/r - 2g\left(\cos\varphi_0 - \cos\varphi\right)\Big]$$

a podmínka $N(\varphi^*) = 0$ pro ztrátu kontaktu s podložkou vede na rovnici

$$0 = g\cos\varphi^* - v_0^2/r - 2g\left(\cos\varphi_0 - \cos\varphi^*\right),$$

která má řešení

$$\varphi^* = \arccos\left(v_0^2/r + \tfrac{2}{3}\cos\varphi_0\right).$$
