

## Příklady k zápočtu z Matematiky II (KMD/MA2) KS (2. část)

Najděte a načrtněte definiční obor funkce.

1.  $f(x, y) = \frac{1}{25-x^2-y^2}$
2.  $f(x, y) = \sqrt{3x} - \frac{2}{\sqrt{y}}$
3.  $f(x, y) = \frac{2}{\sqrt{xy}}$
4.  $f(x, y) = \frac{\pi}{6}y^2\sqrt{x^2 - y^2}$

Najděte řezy grafu funkce  $f$  rovinami rovnoběžnými se souřadnicovými rovinami  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

5.  $f(x, y) = x^2 - y^2$
6.  $f(x, y) = xy^2$

Najděte vrstevnice na grafu funkce  $f$ .

7.  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
8.  $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2$
9.  $f(x, y) = xy$

Utvořte složenou funkci  $h(g_1, g_2)$ , je-li:

10.  $g_1(x, y) = x + 2y$ ,  $g_2(x, y) = x^y$ ,  $h(x, y) = x + y$
11.  $g_1(x, y) = 3xy$ ,  $g_2(x, y) = x^2 - y^2$ ,  $h(x, y) = \sin x + \sqrt{y}$
12.  $g_1(x, y) = x - y$ ,  $g_2(x, y) = x + y$ ,  $h(x, y) = \sqrt{xy}$

Určete parciální derivace funkce  $f$  v bodě  $A$  podle všech jejích proměnných:

13.  $f(x, y) = \frac{\pi}{3}x^2y$ ,  $A = [4, 6]$ .
14.  $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ ,  $A = [1, 1]$ .
15.  $f(x, y) = e^x \sin y$ ,  $A = [1, 2]$ .
16.  $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ ,  $A = [0, 1]$ .
17.  $f(x, y, z, u) = \ln(x^2 + y^2 + z^2 + u^2)$ ,  $A = [3, 2, 1, 0]$ .

Určete parciální derivace funkce  $f$  podle všech jejích proměnných:

18.  $f(x, y) = x^2y + \frac{y^3}{x^4}$

19. Jaký úhel svírá tečna průsečnice plochy  $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$  s rovinou  $y = 1$  v bodě  $T = [1, 1, \sqrt{3}]$  s kladnou poloosou  $x$ ?

Určete diferenciál funkce  $f$  v bodě  $A$ .

20.  $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ ,  $A = [1, 2]$

Určete tečnou rovinu grafu funkce  $f$  v bodě  $T$ :

21.  $f(x, y) = 2x^2 + y^2, \quad T = [1, 1, 3]$

22.  $f(x, y) = x^4 + 2x^2y - xy + x, \quad T = [1, 0, 2]$

23.  $f(x, y) = xy, \quad T = [1, 2, 2]$

Určete  $f'(a)$ ,  $f''(a)$  pro funkci  $f$  určenou implicitně funkcí  $g$  a bodem  $B = [a, b]$ :

24.  $g(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 3x^2y - y^3, \quad B = [0, 1].$

25.  $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3, \quad B = [1, 1].$

26.  $g(x, y) = x^2 - 3xy + 4y^2 - 2x + 3y, \quad B = [2, 0].$

27.  $g(x, y) = x^2 - 2xy - y^2 - 16, \quad B = [4, 0].$

Najděte lokální extrémů funkce  $f$  zadané implicitně funkcí  $g$  a bodem  $B$ :

28.  $g(x, y) = x^4 + y^3 + 2x^2y + 2, \quad B = [1, -1].$

29.  $g(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 1, \quad B = [-1, 0].$

Najděte tečnu a normálu v bodě  $B$  ke grafu funkce  $f$  zadané implicitně funkcí  $g$  a bodem  $B$ :

30.  $g(x, y) = xy + \ln y - 1, \quad B = [1, 1].$

31.  $g(x, y) = x^5 + y^5 - 2xy, \quad B = [1, 1].$

Najděte tečnou rovinu grafu funkce  $f$  zadané implicitně funkcí  $g$  a bodem  $B$ :

32.  $g(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 - 6, \quad B = [1, 2, -3].$

33.  $g(x, y, z) = z - y - \ln \frac{x}{z}, \quad B = [1, 1, 1].$

Najděte body, v nichž má lokální extrémů funkce:

34.  $f(x, y) = 1 + 6y - y^2 - xy - x^2.$

35.  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y + 2.$

36.  $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 6x - 9y.$

37.  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + yz - 2x + y - z.$

38.  $f(x, y, z) = 6x^2 + 5y^2 + 14z^2 + 4xy - 8xz - 2yz + 1.$

39.  $f(x, y, z) = x^3 + 3x^2 + y^2 + z^2 + 12xy + 14x + 14y + 4z + 17.$

Najděte body, v nichž má funkce  $f$  vázané extrémů, příp. vázané lokální extrémů s podmínkou  $g(X) = 0$ :

40.  $f(x, y) = xy - x + y - 1, \quad g(x, y) = x + y - 1.$

41.  $f(x, y) = x + y, \quad g(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 1.$

Najděte body, v nichž má funkce  $f$  globální extrémů:

42.  $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1, \quad D(f)$  je trojúhelník zadaný nerovnostmi  $x \geq 0, y \geq 0, y \leq 3 - x.$

43.  $f(x, y) = xy^2(4 - x - y), \quad D(f)$  je trojúhelník ohraničený přímkami  $x = 0, y = 0, x + y = 6.$