

Matematika 2.

Determinanty

Petr Salač

Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz

4. Přednáška

Determinant

Definice. (Determinant matice)

Uvažujme čtvercovou číselnou matici n -tého řádu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Determinantem matice \mathbf{A} nazýváme číslo určené takto:

1. Pro $n = 1$ je $\det \mathbf{A} = a_{11}$
2. Pro $n = 2$ je $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
3. Pro $n > 2$ je

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \det \mathbf{A}_{11} - a_{12} \det \mathbf{A}_{12} + \dots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det \mathbf{A}_{1n},$$

kde \mathbf{A}_{1k} pro $k = 1, 2, \dots, n$ značí matici $(n - 1)$ -ho řádu, která vznikne z matice \mathbf{A} (n -tého řádu) vynecháním prvního řádku a k -tého sloupce.

Determinant

Příklad

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0$$

Determinant

Věta. (o rozvoji determinantu podle řádku)

Nechť A je matice n -tého řádu, $n > 2$. Pak její determinant lze rozvinout podle prvků libovolného řádku nebo libovolného sloupce.

Označíme-li j -tý řádek jako libovolný řádek, můžeme psát

$$\det A = (-1)^{j+1} a_{j1} \det A_{j1} + (-1)^{j+2} a_{j2} \det A_{j2} + \cdots + \\ + (-1)^{j+n} a_{jn} \det A_{jn} \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Obdobně, pro libovolné $k = 1, 2, \dots, n$ platí

$$\det A = (-1)^{k+1} a_{1k} \det A_{1k} + (-1)^{k+2} a_{2k} \det A_{2k} + \cdots + \\ + (-1)^{k+n} a_{nk} \det A_{nk} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Přitom matice A_{jk} tvoříme obdobným způsobem jako v definici.

Determinant

Příklad

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -20$$

Věta.

Determinant trojúhelníkové matice je roven součinu diagonálních prvků.

Vlastnosti determinantů

1) Pro libovolnou čtvercovou matici A platí

$$\det A = \det A^T .$$

2) Vznikne-li matice B z matice A záměnou pořadí dvou řádků, pak

$$\det B = -\det A .$$

3) Má-li matice A jeden řádek nulový, pak $\det A = 0$.

4) Vznikne-li matice B z matice A vynásobením jednoho řádku číslem k , potom

$$\det B = k \cdot \det A .$$

5) Jestliže v matici přičteme k jednomu řádku násobek jiného řádku, determinant matice se nemění.

6) Jsou-li A a B čtvecové matice téhož řádu, pak

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B .$$

Výpočet determinantu pomocí Gaussovy eliminace

Elementární úpravy determinantů

(takové, že se nemění jeho hodnota)

- 1) Záměnou pořadí dvou řádků se změní znaménko determinantu.
- 2) Z řádku lze vytknout číslo před determinant.
- 3) K řádku můžeme přičíst nenulový násobek jiného řádku.

Sarrusovo pravidlo

Poznámka.

Pro determinanty 3-tího stupně platí

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Poznámka.

Sarrusovo pravidlo platí **pouze** pro determinanty 3-tího stupně. Determinanty vyšších stupňů se počítají jinak.

Vlastní čísla a vlastní vektory

Definice.

Komplexní číslo λ se nazývá **vlastní číslo čtvercové matice A** typu $n \times n$, existuje-li nenulový vektor v takový, že

$$A \cdot v = \lambda v .$$

Takový vektor v se nazývá **vlastní vektor matice A** odpovídající vlastnímu číslu λ .

Rovnici

$$A \cdot v = \lambda v$$

lze psát ve tvaru

$$(A - \lambda E) \cdot v = 0 .$$

To je soustava homogenních lineárních algebraických rovnic, která má nenulové řešení právě když je hodnota matice $(A - \lambda E)$ menší než n , tedy matice $(A - \lambda E)$ je singulární. To je ekvivalentní s podmínkou

$$\det(A - \lambda E) = 0 . \tag{1}$$

Rovnici (1) (pro neznámou λ) nazýváme **charakteristická rovnice matice A** . Jejím řešením získáme vlastní čísla matice A .

Vlastní čísla a vlastní vektory

Příklad.

Nalezněte vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Charakteristická rovnice

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) &= \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2 - \lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = \\ &= (1 - \lambda) \cdot (2 - \lambda) \cdot (-1 - \lambda) + 3 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) \cdot (-1) - \\ &\quad - [(2 - \lambda) \cdot 2 \cdot 4 + (1 - \lambda) \cdot (-1) \cdot 1 + (-1 - \lambda) \cdot (-1) \cdot 3] = \\ &= \dots = (1 - \lambda) \cdot (\lambda - 3) \cdot (\lambda + 2) \end{aligned}$$

Řešením jsou vlastní čísla $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -2$.

Vlastní čísla a vlastní vektory

Výpočet vlastních vektorů.

Vlastní vektory odpovídající vlastnímu číslu λ , můžeme najít řešením homogenní soustavy lineárních algebraických rovnic

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

(pro neznámé v_1, v_2, \dots, v_n , které jsou složkami vektoru \mathbf{v}).

Vlastní čísla a vlastní vektory

Příklad.

Nalezněte vlastní vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

které odpovídají vlastním číslům $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -2$.

Řešení:

Dosadíme vlastní číslo $\lambda_1 = 1$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2 - \lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Gaussovou eliminací dostaneme

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla a vlastní vektory

Řešení:

Dosadíme vlastní číslo $\lambda_1 = 1$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2 - \lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Gaussovou eliminací dostaneme

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešíme ekvivalentní soustavu

$$v_1 + v_3 = 0$$

$$v_2 - 4v_3 = 0$$

Volíme $v_3 = 1$ a dopočítáme $v_2 = 4$. Vše dosadíme do první rovnice a dostaneme $v_1 = -1$. Vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ je tedy

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla a vlastní vektory

Řešení:

Analogicky dosadíme vlastní číslo $\lambda_2 = 3$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2 - \lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Gaussovou eliminací dostaneme

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešíme ekvivalentní soustavu

$$v_1 - 2v_2 + 3v_3 = 0$$

$$v_2 - 2v_3 = 0$$

Volíme $v_3 = 1$ a dopočítáme $v_2 = 2$. Vše dosadíme do první rovnice a dostaneme $v_1 = 1$. Vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_2 = 3$ je tedy

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla a vlastní vektory

Řešení:

Analogicky dosadíme vlastní číslo $\lambda_3 = -2$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2 - \lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Gaussovou eliminací dostaneme

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešíme ekvivalentní soustavu

$$v_1 - 2v_2 + 3v_3 = 0$$

$$v_2 - v_3 = 0$$

Volíme $v_3 = 1$ a dopočítáme $v_2 = 1$. Vše dosadíme do první rovnice a dostaneme $v_1 = -1$. Vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_3 = -2$ je tedy

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$