

# Matematika 2.

## Diferenciální počet funkce $n$ proměnných

Petr Salač a Jiří Hozman  
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická  
Technická univerzita v Liberci  
[petr.salac@tul.cz](mailto:petr.salac@tul.cz)  
[jiri.hozman@tul.cz](mailto:jiri.hozman@tul.cz)

# Diferenciální počet funkce více proměnných

## Definice.

Množinu všech uspořádaných  $n$ -tic čísel se nazývá  **$n$ -rozměrný prostor** a každá z  $n$ -tic se prohlásí za **bod  $n$ -rozměrného prostoru** (čísla  $x_1, \dots, x_n$  za jeho **souřadnice**).

značíme:  $X = [x_1, \dots, x_n]$

## Definice. (Vzdálenost bodů)

Každé dvojici bodů  $X, Y$  přiřadíme číslo  $d(X, Y)$  předpisem

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} .$$

Číslo  $d(X, Y)$  nazýváme **vzdálenost bodů  $X, Y$** .

## Příklad.

$n = 2, n = 3$ .

## Definice. ( $n$ -rozměrný euklidovský prostor)

$n$ -rozměrný prostor spolu se vzdáleností  $d$  se nazývá  **$n$ -rozměrný euklidovský prostor** a značí se  $E_n$ .

# Diferenciální počet funkce více proměnných

**Věta.** (základní vlastnosti vzdálenosti)

Vzdálenost  $d$  má tyto vlastnosti:

- 1)  $d(X, Y) = 0$ , právě když  $X = Y$ .
- 2)  $d(X, Y) = d(Y, X)$  pro libovolné  $X, Y \in \mathbf{E}_n$ .
- 3)  $d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z)$  pro libovolné  $X, Y, Z \in \mathbf{E}_n$ .  
(trojúhelníková nerovnost).

**Definice.** (Funkce  $n$ -proměnných)

Předpokládáme, že  $n \in \mathbf{N}$  a  $M \subset \mathbf{E}_n$ . **Funkcí  $n$ -proměnných** se rozumí zobrazení  $f$  množiny  $M$  do množiny  $\mathbf{R}$ , tj. předpis, který každému bodu  $X \in M$  přiřazuje jediné reálné číslo  $y$ .

**Označení**

$D(f)$  značí **definiční obor** funkce  $f$ . (tj. množina  $M$ ).

$H(f)$  značí **obor hodnot** funkce  $f$ . (tj.  $H(f) \subset \mathbf{R}$ ).

Pro libovolný bod  $X = [x_1, \dots, x_n] \in D(f)$ , nazýváme  $x_k$  hodnotou  **$k$ -té nezávislé proměnné** pro  $k = 1, \dots, n$ .

Libovolné  $y \in H(f)$  nazýváme hodnotou **závisle proměnné** funkce  $f$ .

**Hodnotu funkce  $f$   $n$  proměnných v bodě  $X = [x_1, \dots, x_n] \in D(f)$  značíme  $f(X)$  nebo  $f(x_1, \dots, x_n)$ .**

# Diferenciální počet funkce více proměnných

## Příklad.

Funkce  $f$  tří proměnných, která každému  $[x, y, z] \in \mathbf{E}_3$  přiřazuje číslo  $x + y + 3z$ .  
 $D(f) = \mathbf{E}_3$ ,  $H(f) = \mathbf{R}$ , funkční předpis  $f(x, y, z) = x + y + 3z$ .

## Poznámka

Není-li pro funkci  $f$   $n$  proměnných danou výrazem zadán definiční obor, tak za definiční obor považujeme množinu všech bodů  $X \in \mathbf{E}_n$ , pro něž má výraz  $f(X)$  smysl.

## Příklad.

Určete definiční obor funkce  $f(x, y, z) = \ln x + \sqrt{y} + 3z^2$ .

## Definice. (Graf funkce)

**Graf funkce**  $f$   $n$  proměnných je definován jako množina všech bodů  $[x_1, \dots, x_n, y] \in \mathbf{E}_{n+1}$  takových, že  $[x_1, \dots, x_n] \in D(f)$  a  $y = f(x_1, \dots, x_n)$ .

## Příklad. $n = 2$

Graf je množina  $[x, y, z] \in \mathbf{E}_3$  takových, že  $[x, y] \in D(f)$  a  $z = f(x, y)$ .

# Diferenciální počet funkce více proměnných

## Poznámka.

Protože každému  $[x, y] \in D(f)$  přísluší jediné  $z \in H(f)$ , nemůže mít graf funkce  $f$  dvou proměnných se žádnou přímkou rovnoběžnou s osou  $z$  dva nebo více společných bodů.

(tj. např. kulová plocha není grafem žádné funkce dvou proměnných).

## Příklad.

Sestrojte graf funkce

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

definované na množině  $\mathbf{E}_2$ .

$$G(f) = \{[x, y, z] \in \mathbf{E}_3; z = x^2 + y^2\}$$

$h(f) = ]0, \infty)$ .

(rotační paraboloid s vrcholem v počátku)

# Diferenciální počet funkce více proměnných

## Poznámka.

Pro vytvoření názorné představy zavádíme pro  $\alpha \in \mathbf{R}$  tzv. **hladinu funkce  $f$**  jako množinu  $\mathcal{H}_\alpha = \{[X, \alpha] \in \mathbf{E}_{n+1}; f(X) = \alpha\}$ .

Tím je také tomuto číslu  $\alpha$  přiřazena podmnožina definičního oboru  $\mathcal{V}_\alpha = \{X \in D(f); f(X) = \alpha\}$  tzv. **vrstevnice funkce  $f$** .

## Příklad.

Pro funkci

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\alpha = 1 \quad \mathcal{H}_1 = \{[x, y, 1] \in \mathbf{E}_3; x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\mathcal{V}_1 = \{[x, y] \in \mathbf{E}_2; x^2 + y^2 = 1\}.$$

$$\alpha = 4 \quad \mathcal{H}_4 = \{[x, y, 4] \in \mathbf{E}_3; x^2 + y^2 = 4\}$$

$$\mathcal{V}_4 = \{[x, y] \in \mathbf{E}_2; x^2 + y^2 = 4\}.$$

## Poznámka.

V praxi se často setkáváme se situací, že funkční přiřazení není zadáno výrazem (nebo několika výrazy), nýbrž tabulkou funkčních hodnot.

# Diferenciální počet funkce více proměnných

**Definice.** (Operace s funkcemi)

Řekneme, že funkce  $f$  a  $g$   $n$  proměnných jsou si **rovny**, jestliže  $D(f) = D(g)$  a pro každý bod  $X \in D(f)$  je  $f(X) = g(X)$ .

Jsou-li  $f$  a  $g$  funkce  $n$  proměnných, definujeme:

**Součet**  $f + g$  je funkce  $h$   $n$  proměnných definovaná vztahem  $h(X) = f(X) + g(X)$ ,

**rozdíl**  $f - g$  je funkce  $h$   $n$  proměnných definovaná vztahem  $h(X) = f(X) - g(X)$ ,

**součin**  $f.g$  je funkce  $h$   $n$  proměnných definovaná vztahem  $h(X) = f(X).g(X)$ ,

**podíl**  $\frac{f}{g}$  je funkce  $h$   $n$  proměnných definovaná vztahem  $h(X) = \frac{f(X)}{g(X)}$ ,

ve všech čtyřech případech je funkce  $h$  definována pro každý  $X$ , pro nějž příslušný výraz existuje.

**Nulovým bodem (kořenem)** funkce  $f$   $n$  proměnných nazveme každý bod z  $D(f)$ , v němž funkce  $f$  nabývá hodnoty nula.

# Diferenciální počet funkce více proměnných

**Definice.** (Složená funkce)

Nechť  $h$  je funkce  $p$  proměnných a  $g_1, \dots, g_p$  je  $p$  funkcí  $n$  proměnných. **Složená funkce  $f$  s vnitřními složkami  $g_1, \dots, g_p$  a s vnější složkou  $h$**  má pak definiční obor

$$D(f) = \{X \in D(g_1) \cap \dots \cap D(g_p); [g_1(X), \dots, g_p(X)] \in D(h)\}$$

a funkční předpis

$$f(X) = h(g_1(X), g_2(X), \dots, g_p(X)) .$$

**Poznámka.**

Složená funkce  $f$  je funkcí  $n$  proměnných (tedy tolika proměnných, kolik jich mají vnitřní složky).



# Diferenciální počet funkce více proměnných

## Příklad.

Je dána funkce  $h(x, y, z) = e^{xy} \arcsin z$  s definičním oborem

$D(h) = \{[x, y, z] \in \mathbf{E}_3; -1 \leq z \leq 1\}$  a funkce

$$g_1(x, y) = \sqrt{1 - x - y} \quad \text{s} \quad D(g_1) = \{[x, y] \in \mathbf{E}_2; y \leq 1 - x\}$$

$$g_2(x, y) = \sqrt{y + 1} \quad \text{s} \quad D(g_2) = \{[x, y] \in \mathbf{E}_2; y \geq -1\}$$

$$g_3(x, y) = \sqrt{1 + x - y} \quad \text{s} \quad D(g_3) = \{[x, y] \in \mathbf{E}_2; y \leq 1 + x\}$$

Sestrojte funkci

$$f = h(g_1, g_2, g_3).$$

$$D(f) = \{[x, y] \in \mathbf{E}_2; y \leq 1 - x, y \geq -1, y \leq 1 + x, y \geq x\}$$

$$f(x, y) = h(g_1(x, y), g_2(x, y), g_3(x, y)) =$$

$$= e^{\sqrt{1-x-y}\sqrt{y+1}} \arcsin \sqrt{1+x-y}.$$

# Diferenciální počet funkce více proměnných

## Definice.

Řekneme, že funkce  $f$   $n$  proměnných je **omezená**, jestliže její obor hodnot je omezená množina.

$$\text{tj. } \exists M > 0 \forall X \in D(f) \quad |f(X)| \leq M$$

Řekneme, že funkce  $f$   $n$  proměnných je **shora omezená**, resp. **zdola omezená**, jestliže její obor hodnot je **shora omezená**, resp. **zdola omezená**, množina.

$$\text{tj. } \exists M > 0 \forall X \in D(f) \quad f(X) \leq M,$$

resp.

$$\text{tj. } \exists M > 0 \forall X \in D(f) \quad f(X) \geq -M.$$

## Příklad.

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2, \quad D(f) = \mathbf{E}_n.$$

je zdola omezená  $M = 0$

není shora omezená.

# Limita a spojitost funkce $n$ proměnných

## Definice

Nechť  $A \in \mathbf{E}_n$ ,  $\delta > 0$ . **Okolím bodu  $A$  s poloměrem  $\delta$**  (nebo  $\delta$ -okolím bodu  $A$ ) se rozumí množina

$$\{X \in \mathbf{E}_n; d(A, X) < \delta\}$$

(tj. do  $\delta$ -okolí bodu  $A$  patří právě všechny body z  $\mathbf{E}_n$ , jejichž vzdálenost od bodu  $A$  je menší než  $\delta$ .)

## Příklad.

$n = 1$ , pak  $\delta$ -okolím bodu  $A$  je interval  $(A - \delta, A + \delta)$ .

$n = 2$ , pak  $\delta$ -okolím bodu  $A$  je množina všech bodů ležících uvnitř kruhu se středem v  $A$  a poloměrem  $\delta$ .

$n = 3$ , pak  $\delta$ -okolím bodu  $A$  je množina všech bodů ležících uvnitř koule se středem v  $A$  a poloměrem  $\delta$ .

# Limita a spojitost funkce $n$ proměnných

## Definice.

Je-li  $M \subset \mathbf{E}_n$ ,  $A \in \mathbf{E}_n$ , řekneme, že  $A$  je **vnitřní bod** množiny  $M$ , jestliže existuje okolí bodu  $A$ , které je podmnožinou  $M$ .

Množina, jejíž každý bod je vnitřní, se nazývá **otevřená**.

## Příklad.

$$M = \{[x, y] \in \mathbf{E}_2; 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \text{ nebo } x = y = 2\}$$

vnitřní body  $\{[x, y] \in \mathbf{E}_2; 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ .

# Limita a spojitost funkce $n$ proměnných

## Definice

Je-li  $M \subset \mathbf{E}_n$ ,  $A \in \mathbf{E}_n$  a obsahuje-li každé okolí bodu  $A$  nějaký bod množiny  $M$  a nějaký bod nepatřící do  $M$ , řekneme, že  $A$  je **hraniční bod** množiny  $M$ .

Množina  $M \subset \mathbf{E}_n$  se nazývá **uzavřená**, jestliže obsahuje všechny své hraniční body.

## Příklad.

$$M = \{[x, y] \in \mathbf{E}_2; 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \text{ nebo } x = y = 2\}$$

$$\text{hraniční body } \{[x, y] \in \mathbf{E}_2; \quad (x = 0 \vee x = 1) \wedge 0 \leq y \leq 1 \vee \\ \vee (y = 0 \vee y = 1) \wedge 0 \leq x \leq 1 \vee \\ \vee x = y = 2\}.$$

$$\text{uzavřená množina } \overline{M} = \{[x, y] \in \mathbf{E}_2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \text{ nebo } x = y = 2\}.$$