Matematika II (KMD/MA2) - cvičení 8

FAKULTA STROJNÍ (akad. rok 2019/2020 a vyšší)

Příklad 1. Určete $f'(a)$, $f''(a)$ pro funkci f určenou implicitně funkcí g a bodem $B = [a, b]$, je-li:

a) $g(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 3x^2y - y^3,\ B = [0, 1],$ $\quad [f'(a) = 0,\ f''(a) = 2]$

b) $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3,\ B = [1, 1]$ $\quad \left[f'(a) = -1,\ f''(a) = -\frac{2}{3}\right]$

Příklad 2. Určete $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ pro funkci f určenou implicitně funkcí g a bodem $B = [a, b, c]$, je-li:

a) $g(x, y, z) = xy - z - e^z + 1,\ B = [1, 0, 0],$ $\quad \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \frac{1}{2}\right]$

b) $g(x, y, z) = z^3 + 3xyz - 1,\ B = [2, 0, 1]$ $\quad \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = -2\right]$

Příklad 3. Najděte lokální extrémy funkce f zadané implicitně funkcí g a bodem B, je-li:

a) $g(x, y) = x^4 + y^3 + 2x^2y + 2,\ B = [1, -1],$ $\quad \left[\text{lok. min.}[0; -\sqrt[3]{2}],\ \text{lok. max.}[1; -1], [-1; -1]\right]$

b) $g(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 1,\ B = [-1, 0],$ $\quad [\text{lok. min.}[-3; -2],\ \text{lok. max.}[-1; 0]]$

Příklad 4. Najděte tečnu a normálu v bodě B ke grafu funkce f zadané implicitně funkcí g a bodem B, je-li:

a) $g(x, y) = xy + \ln y - 1,\ B = [1, 1],$ $\quad \left[t : y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2},\ n : y = 2x - 1\right]$

b) $g(x, y) = x^5 + y^5 - 2xy,\ B = [1, 1],$ $\quad [t : y = -x + 2,\ n : y = x]$

Příklad 5. Najděte tečnou rovinu grafu funkce f zadané implicitně funkcí g a bodem B, je-li:

a) $g(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 - 6,\ B = [1, 2, -3],$ $\quad \left[z + 3 = \frac{1}{3}(x - 1) - \frac{2}{3}(y - 2)\right]$

b) $g(x, y, z) = z - y - \ln\left(\frac{x}{z}\right),\ B = [1, 1, 1]$ $\quad \left[z - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}(y - 1)\right]$

Příklad 6. Vyšetřete lokální extrémy funkcí, je-li:

a) $f(x, y) = 1 + 6y - y^2 - xy - x^2,$ $\quad$ [lokální maximum v $[-2, 4]$]

b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y + 2,$ $\quad$ [lokální minimum v $[1, 1]$]

c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 6x - 9y,$ $\quad$ [lokální minimum v $[1, 4]$]

d) $f(x, y) = 2x^3y - x^2y^2 + 32x + 5$ $\quad$ [nemá extrém, sedlo v [-2,-2]]

e) $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5,$ $\quad \left[\text{lokální minimum v } \left[1, \frac{1}{2}\right]\right]$

f) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 18xy + 15$ $\quad$ [lokální minimum v $[6, 6]$, sedlo v $[0, 0]$]

Příklad 7. Vyšetřete lokální extrémy funkcí, je-li:

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + yz - 2x + y - z,$ $\quad$ [lok. min. v $[1, -1, 1]$]

b) $f(x, y, z) = 6x^2 + 5y^2 + 14z^2 + 4xy - 8xz - 2yz + 1,$ $\quad$ [lok. min. v $[0, 0, 0]$]

c) $f(x, y, z) = x^3 + 3x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 14x + 14y + 4z + 17,$ $\quad$ [lok. min. v $[0, -7, -2]$]

d) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz + yz),$ $\quad$ [sedlo v $[0, 0, 0]$, lok. min. v $[2, 2, 2]$]

e) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z,$ $\quad$ [lok. min. v $[24, -144, -1]$]