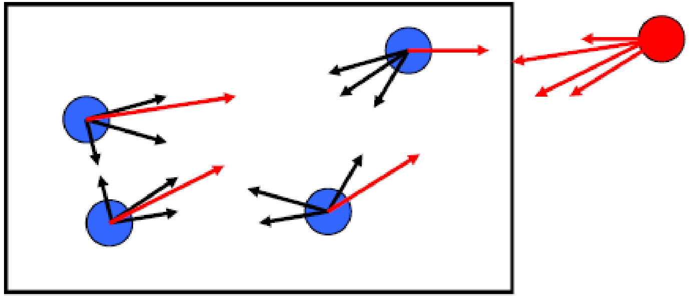
FAKULTA
PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ
A PEDAGOGICKÁ TUL

PR8 – FYZ1 23/24 FS
Tuhé těleso

Ing. Štěpán Kunc, Ph.D.

stepan.kunc@tul.cz

Hmotný střed- soustavy hmotných bodů



Hmotný střed - soustavy hmotných bodů SHB

V homogenním tíhovém poli stejný jako **Těžiště**

Těžiště – fiktivní hmotný bod, jehož hmotnost je rovna celkové hmotnosti SHB, a jehož hybnost je rovna celkové hybnosti SHB.

Translaci SHB lze nahradit sledováním pouze těžiště – tuhé vazby.

Hmotnost T $m_T = \sum_i m_i$ **Hybnost T** $\vec{p}_T = \sum_i \vec{p}_i$

$$m_T \vec{v}_T = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$m_T \frac{d\vec{r}_T}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \qquad m_T \vec{r}_T = \sum_i m_i \vec{r}_i$$

Rychlost T $\vec{v}_T = \dfrac{1}{m_T} \sum_i m_i \vec{v}_i$

Poloha T $\vec{r}_T = \dfrac{1}{m_T} \sum_i m_i \vec{r}_i$

Poloha těžiště má mimořádný význam pro tzv. Stabilní (labilní) rovnováhu těles

Zákon zachování hybnosti SHB

Celková hybnost SHB $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ $\Rightarrow$ $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$ $\Rightarrow$ $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_i^{vnější}$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_i^{vnější}$$

První věta impulsová (věta o hybnosti soustavy)

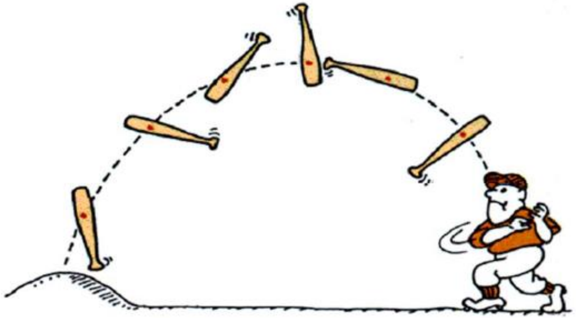
Izolovaná soustava HB – nepůsobí žádné vnější síly $\vec{F}_i^{vnější} = \vec{0}$

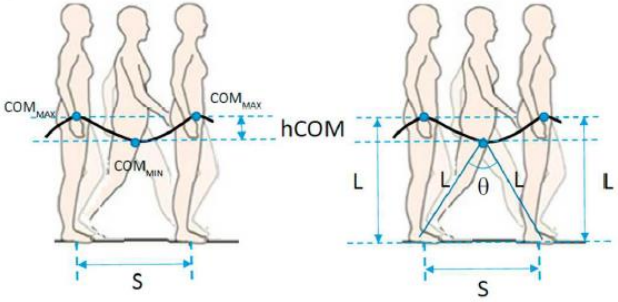
$$\Delta\vec{P} = \vec{0}$$

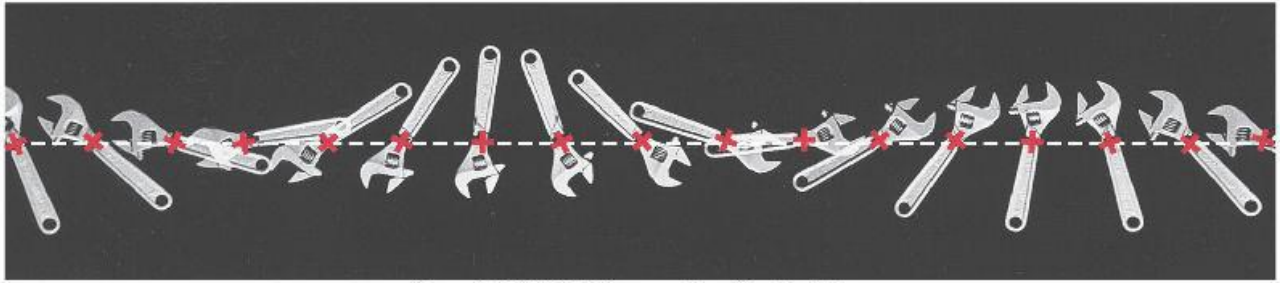
V izolované soustavě HB se zachovává celková hybnost soustavy

Pohybová rovnice hmotného středu SHB

Hmotný střed vykonává stejný pohyb jako HB, ale se soustředěnou hmotou celé SHB







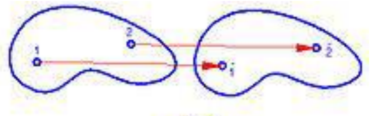
Soustavy hmotných bodů

Hmotnost T $m_T = \sum_i m_i$ **Hybnost T** $\vec{p}_T = \sum_i \vec{p}_i$

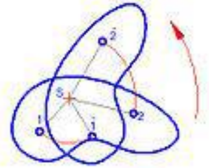
Poloha T $\vec{r}_T = \frac{1}{m_T} \sum_i m_i \vec{r}_i$

Tuhé těleso

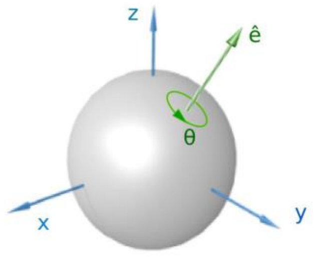
Soustava hmotných bodů, které nemění vzájemnou vzdálenost (nedeformovatelný materiál)
6 stupňů volnosti – 2 vektorové rovnice + 12 podmínek (2 impulzové věty)

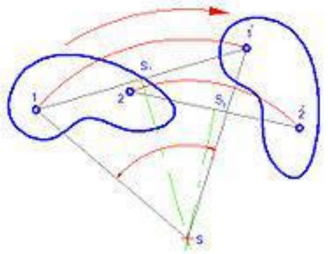


a. **Translační pohyb – stačí sledovat jeden bod**
b. **Rotační pohyb – pevná osa, okamžitá osa**



Poloha tuhého tělesa určena 3 body
1. bod (např. těžiště) má 3 stupně volnosti
2. bod má 2 stupně volnosti-určí osu rotace
3. bod má 1 stupeň volnosti –určí úhel otočení při rotaci
Celkem 6 stupňů volnosti





Soustavy hmotných bodů

Hmotnost T $m_T = \sum_i m_i$ **Hybnost T** $\vec{p}_T = \sum_i \vec{p}_i$

Poloha T $\vec{r}_T = \frac{1}{m_T} \sum_i m_i \vec{r}_i$

Tuhé těleso

Vhledem vysoké hustotě rozložení z velkého počtu molekul, pevných, kapalných, plynných
Je možné uvažovat spojité rozložení látky v prostoru (spojité funkce prostoru a času)

Hustota tělesa

$$\rho(\vec{r}) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$$

Hmotnost tělesa

$$m = \int_V \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}V$$

Těžiště tělesa

$$\vec{r}_T = \frac{\int_V \rho(\vec{r})\,\vec{r}\,\mathrm{d}V}{\int_V \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}V}$$

Tuhé těleso - translace

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_i^{vnější}$$

První věta impulsová (věta o hybnosti soustavy)

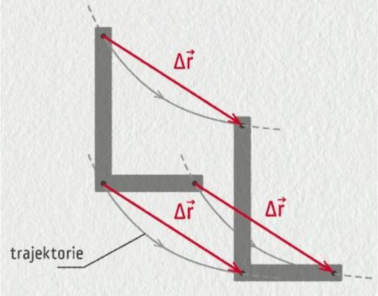
$$\vec{F}_i^{vnější} = \vec{0}$$

$$\Delta\vec{P} = \vec{0}$$

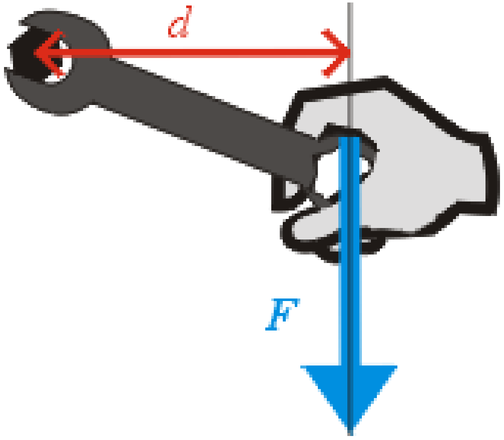
$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_T}{\mathrm{d}t} = m_T \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_T}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}$$

1.impulsová věta

popisuje pohyb tuhého tělesa při translaci

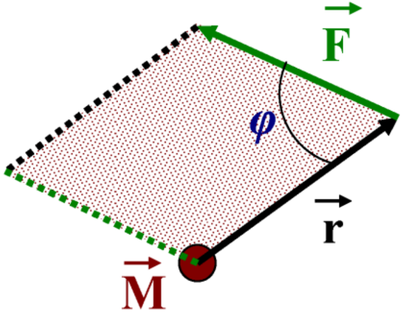


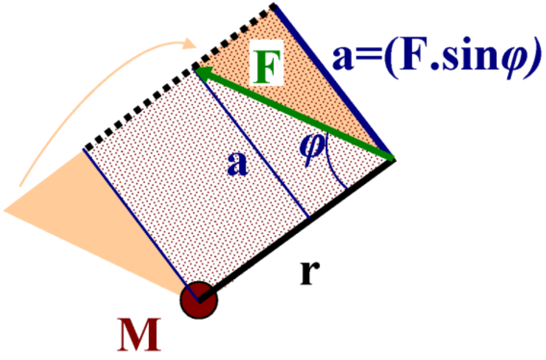
Moment síly - opakování

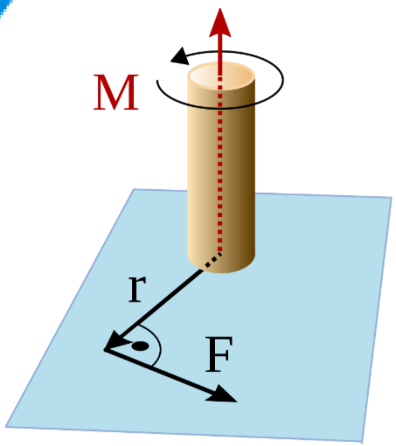


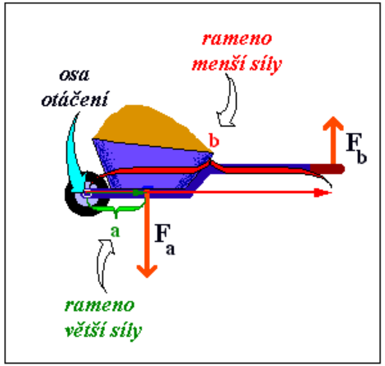
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M = F.\sin\varphi.r$$









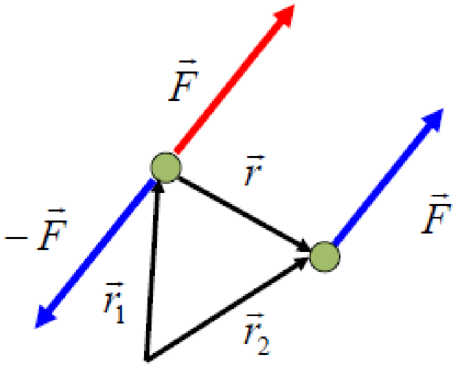
Redukce sil k bodu

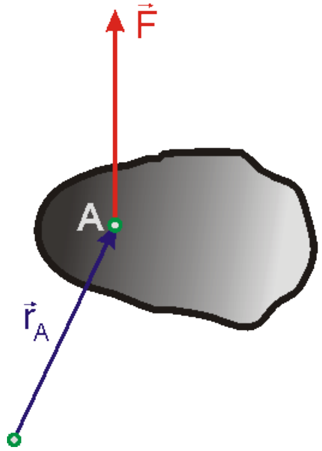
V tuhém tělesu můžeme každou sílu posunout do libovolného bodu, připojíme-li doplňkovou dvojici sil, její Moment **M** je roven momentu původní síly vzhledem k novému působišti.

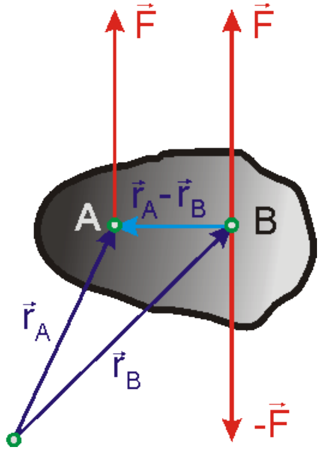
$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times (-\vec{F}) + \vec{r}_2 \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

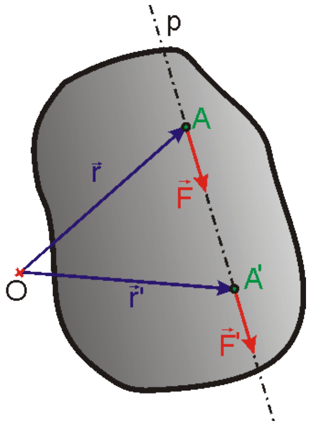
$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r}\,' \times \vec{F}$$

Posunutí po přímce ve směru síly









Text mmf

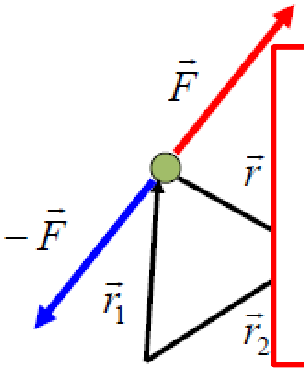
Redukce sil k bodu

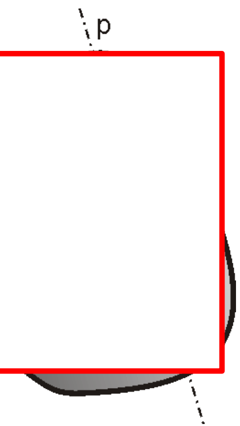
V tuhém tělesu můžeme každou sílu posunout do libovolného bodu, připojíme-li doplňkovou dvojici sil, její Moment **M** je roven momentu původní síly vzhledem k novému působišti.

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times (-\vec{F}) + \vec{r}_2 \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r}\,' \times \vec{F}$$

Posunutí po přímce ve směru síly





Rovnováha tuhého tělesa

$$\vec{F} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} = 0 \qquad \vec{M} = \sum_{\alpha} \vec{M}_{\alpha} = 0$$

Text mmf

Moment hybnosti - opakování

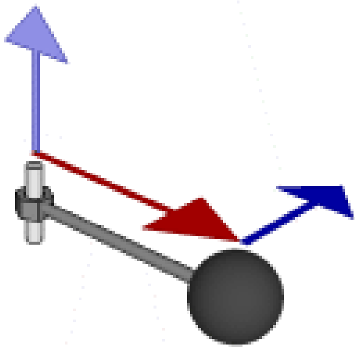
Moment hybnosti $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

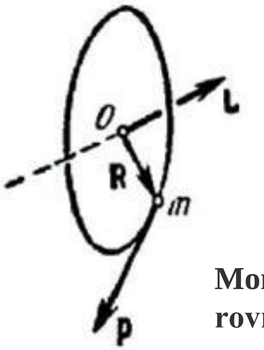
$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \left(\mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}(m\mathbf{v})}{\mathrm{d}t}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times m\mathbf{v}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t}$$

Časová změna momentu hybnosti

$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$





Moment hybnosti hmotného bodu vzhledem ke středu kružnice O se rovná absolutní hodnotě: L = mvr . Vektor L je kolmý k rovině kružnice a směr pohybu bodu a vektor L tvoří pravotočivou soustavu.

Tuhé těleso - rotace

Na rotaci připadají tři stupně volnosti

Rotace nastává otáčením kolem osy – (okamžitá osa , pevná osa)

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha\right] = \left[\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha\right] + \sum_{\beta=1}^{n}\left[\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\beta\alpha}\right]$$

časová změna momentu hybnosti 1 hmot.bodu

$$\sum_{\alpha}\frac{\mathrm{d}\vec{L}_\alpha}{\mathrm{d}t} = \sum_{\alpha}\vec{M}_\alpha + \sum_{\alpha}\sum_{\beta=1}\left[\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\beta\alpha}\right]$$

celková změna momentu hybnosti tělesa

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\left[\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\beta\alpha}\right] = 0 \Rightarrow$$

platí pro centrální interakční síly

2.impulsová věta

celkový moment síly

Tuhé těleso - rotace

Na rotaci připadají tři stupně volnosti

Rotace nastává otáčením kolem osy – (okamžitá osa , pevná osa)

$$\frac{d\vec{L}_\alpha}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha\right] = \left[\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha\right] + \sum_{\beta=1}^{n}\left[\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\beta\alpha}\right]$$

časová změna momentu hybnosti 1 hmot.bodu

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_i^{vnější}$$

Druhá věta impulsová (věta o točivosti soustavy)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\left[\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\beta\alpha}\right] = 0$$

platí pro centrální interakční síly

2.impulsová věta

celkový moment síly

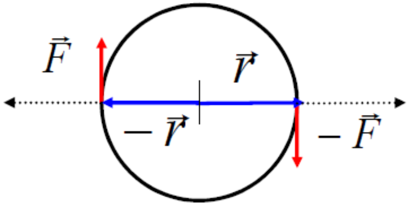
Tuhé těleso - zákony zachování

Pokud je těleso izolované (soustava těles) = nejsou přítomny vnější síly, potom platí.

$$\vec{F} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} = 0 \qquad \vec{M} = \sum_{\alpha} \vec{M}_{\alpha} = 0$$

!!!!!!

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$$



$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M} \neq \vec{0}$$

$\boxed{\vec{p} = \text{konst.}}$

$\vec{v}_T = \text{konst.}$

zákon zachování hybnosti

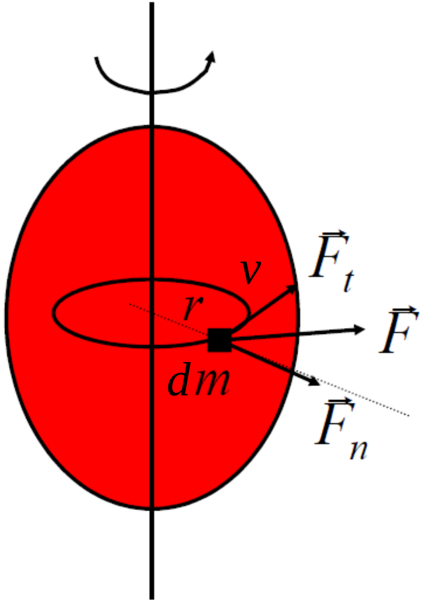
$\boxed{\vec{L} = \text{konst.}}$

zákon zachování momentu hybnosti

$\boxed{W = W_k + W_p = \text{konst.}}$

zákon zachování mechanické energie

Tuhé těleso – moment setrvačnosti (pevná osa)



Moment hybnosti pro HB je $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Při rotaci kolem pevné osy (kdy $\vec{r} \perp \vec{v}$), je moment hybnosti elementu *dm*

$$v = r \cdot \omega$$

Monet hybnosti jednoho bodu (elementu *dm*)r je vzdálenost od osy rotace

$$dL = dm \cdot r \cdot v = dm \cdot r^2 \cdot \omega$$

Celkový moment hybnosti

$$L = \int dL = \int dm \cdot r^2 \cdot \omega \; = \omega \int r^2 dm$$

Moment setrvačnosti

$$L = J \cdot \omega$$

$$J = \iiint r^2 dm = \iiint r^2 \rho_{(r)} dV$$

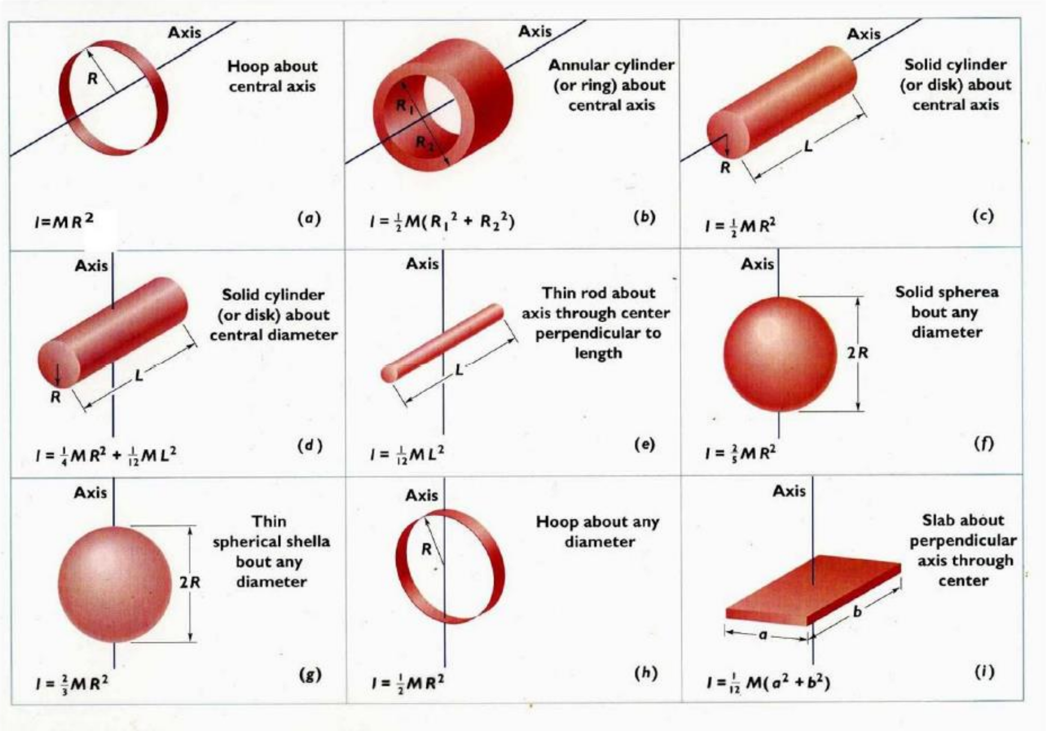
Pohybová rovnice rotace: $M = J \cdot \varepsilon$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = J\vec{\varepsilon} = \vec{M}$$

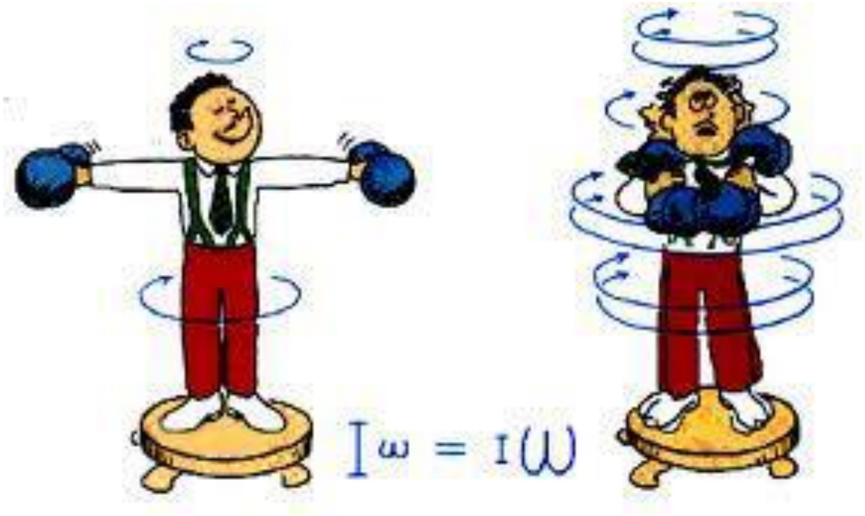
J je moment setrvačnosti J je aditivní, pro dvě tělesa je jejich celkový J součtem dílčích Ji, např. člověk na houpačce

Moment setrvačnosti – symetrických těles

$$J = \iiint r^2 dm = \iiint r^2 \rho_{(r)} dV$$



Změna momentu setrvačnosti

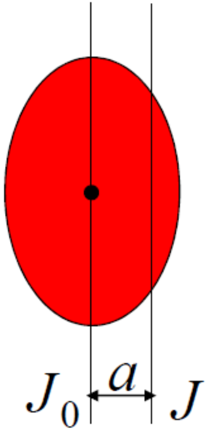


[Video: zákony zachování momentu hybnosti]

[MIT ZZMH]

Steinerova věta

Moment setrvačnosti vzhledem k ose neprocházející těžištěm, rovnoběžné s původní osou



$$J = J_0 + Ma^2$$

Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k libovolně zvolené ose o je *součtem* jeho momentu setrvačnosti I_T vzhledem k rovnoběžné ose o' ($o' \parallel o$), vedené jeho těžištěm, a momentu setrvačnosti mh^2 veškeré hmoty soustředěné v těžišti vzhledem k ose o, kde h je vzdálenost os o, o'.

Jakob Steiner
(*1796 - †1863)