



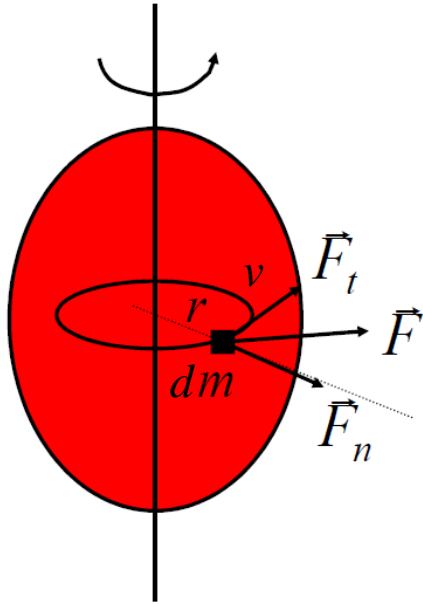
PR11 – FYZ1 22/23 FS

Tuhé těleso 2

Ing. Štěpán Kunc, Ph.D.

stepan.kunc@tul.cz

Tuhé těleso – moment setrvačnosti (pevná osa)



Moment hybnosti pro HB je $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Při rotaci kolem pevné osy (kdy $\vec{r} \perp \vec{v}$), je moment hybnosti elementu dm

$$v = r \cdot \omega$$

Moment hybnosti jednoho bodu (elementu dm) r je vzdálenost od osy rotace

$$dL = dm \cdot r \cdot v = dm \cdot r^2 \cdot \omega$$

Celkový moment hybnosti

$$L = \int dL = \int dm \cdot r^2 \cdot \omega = \omega \int r^2 dm$$

Moment setrvačnosti

$$L = J \cdot \omega$$

$$\text{Pohybová rovnice rotace: } M = J \cdot \varepsilon$$


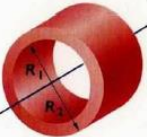
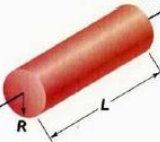
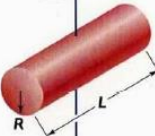

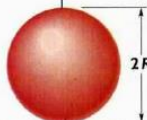
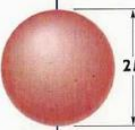

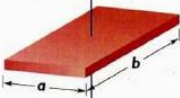
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = J \vec{\varepsilon} = \vec{M}$$

$$J = \iiint r^2 dm = \iiint r^2 \rho(r) dV$$

J je moment setrvačnosti J je aditivní, pro dvě tělesa je jejich celkový J součtem dílčích Ji, např. člověk na houpačce

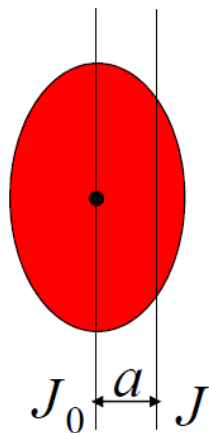
Moment setrvačnosti – symetrických těles

$$J = \iiint r^2 dm = \iiint r^2 \rho(r) dV$$

 <p>Axis</p> <p>Hoop about central axis</p> <p>$I = MR^2$ (a)</p>	 <p>Axis</p> <p>Annular cylinder (or ring) about central axis</p> <p>$I = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$ (b)</p>	 <p>Axis</p> <p>Solid cylinder (or disk) about central axis</p> <p>$I = \frac{1}{2} MR^2$ (c)</p>
 <p>Axis</p> <p>Solid cylinder (or disk) about central diameter</p> <p>$I = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$ (d)</p>	 <p>Axis</p> <p>Thin rod about axis through center perpendicular to length</p> <p>$I = \frac{1}{12} ML^2$ (e)</p>	 <p>Axis</p> <p>Solid sphere about any diameter</p> <p>$I = \frac{2}{5} MR^2$ (f)</p>
 <p>Axis</p> <p>Thin spherical shell about any diameter</p> <p>$I = \frac{2}{3} MR^2$ (g)</p>	 <p>Axis</p> <p>Hoop about any diameter</p> <p>$I = \frac{1}{2} MR^2$ (h)</p>	 <p>Axis</p> <p>Slab about perpendicular axis through center</p> <p>$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$ (i)</p>

Steinerova věta

Moment setrvačnosti vzhledem k ose neprocházející těžištěm, rovnoběžné s původní osou



$$J = J_0 + Ma^2$$

Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k libovolně zvolené ose o je *součtem* jeho momentu setrvačnosti I_T vzhledem k rovnoběžné ose o' ($o' \parallel o$), vedené jeho těžištěm, a momentu setrvačnosti mh^2 veškeré hmoty soustředěné v těžišti vzhledem k ose o , kde h je vzdálenost os o, o' .



Jakob Steiner
(*1796 - †1863)

Moment setrvačnosti válce

Příklad 1 a 2

[video](#)

Práce a výkon při rotačním pohybu

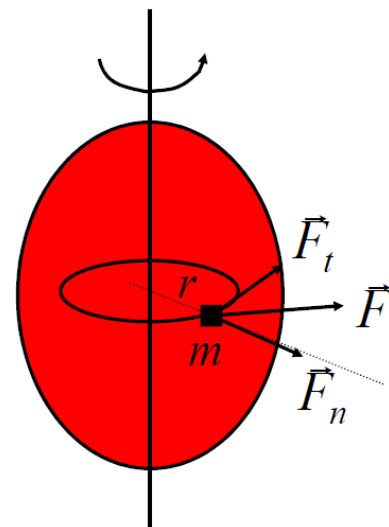
Práce:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_t ds = F_t r d\theta = M d\theta$$

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} M d\theta$$

Výkon:

$$P = \frac{dW}{dt} = M\omega$$



Kinetická energie:

$$E_k = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\omega \cdot r_{\alpha})^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha}^2$$

$$\vec{v}_T = 0 \quad \vec{\omega} = \text{konst.}$$

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad \Rightarrow \quad W = \Delta E_k$$

Rotační a posuvný pohyb

Tabulka 11.3 Posuvný a otáčivý pohyb

POSUVNÝ POHYB V DANÉM SMĚRU		OTÁČIVÝ POHYB KOLEM PEVNÉ OSY	
poloha	x	úhlová poloha	θ
rychlost	$v = dx/dt$	úhlová rychlost	$\omega = d\theta/dt$
zrychlení	$a = dv/dt$	úhlové zrychlení	$\varepsilon = d\omega/dt$
hmotnost	m	moment setrvačnosti	I
věta o hybnosti	$ma = F$	věta o momentu hybnosti	$I\varepsilon = M$
práce	$W = \int F dx$	práce	$W = \int M d\theta$
kinetická energie	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	kinetická energie	$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$
výkon	$P = Fv$	výkon	$P = M\omega$
vztah mezi prací a změnou kinetické energie	$W = \Delta E_k$	vztah mezi prací a změnou kinetické energie	$W = \Delta E_k$

Tabulka 12.2 Posuvný a otáčivý pohyb, pokračování tab. 11.3

POSUVNÝ POHYB V DANÉM SMĚRU		OTÁČIVÝ POHYB KOLEM PEVNÉ OSY	
síla	\mathbf{F}	moment síly	$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
hybnost	\mathbf{p}	moment hybnosti	$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$
hybnost ^a	$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}_i$	moment hybnosti ^a	$\mathbf{L} = \sum \mathbf{L}_i$
hybnost ^a	$\mathbf{P} = m\mathbf{v}_T$	moment hybnosti ^b	$L = I\omega$
věta o hybnosti ^a	$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$	věta o momentu hybnosti ^a	$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{M}_{\text{ext}}$
zákon zachování ^c	$\mathbf{P} = \text{konst.}$	zákon zachování ^c	$\mathbf{L} = \text{konst.}$

Pohyb tuhého tělesa

Příklad 3 a 4

Setrvačník - Gyroskop

[Kolo 1](#)

[Kolo 2](#)

Rozbor na tabuli

[Přednáška MIT](#)

Setrvačník - Gyroskop

