



PR13 – FYZ1 22/23 FS

Kmity 2

Ing. Štěpán Kunc, Ph.D.

stepan.kunc@tul.cz

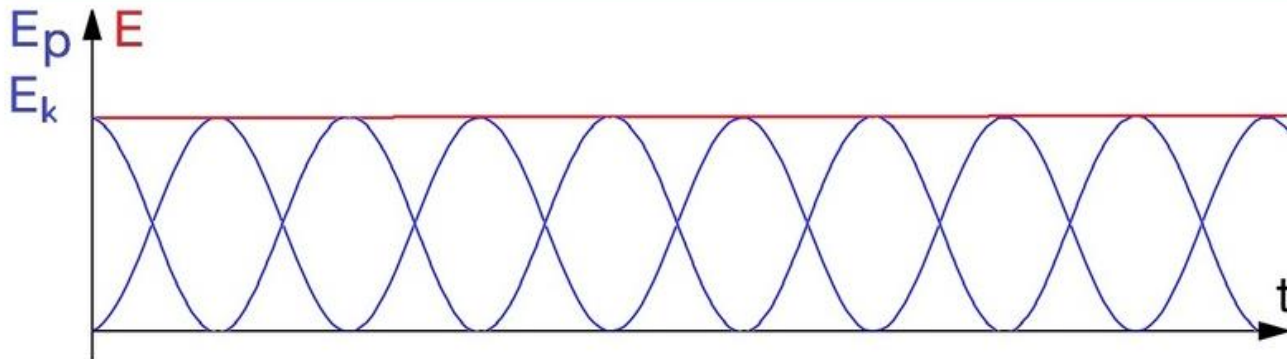
Kmity- energie

$$E_p = \frac{1}{2}ky_m^2$$
$$E_k = \frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 y_m^2$$



$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ky_m^2 \sin^2(\omega t) + \frac{1}{2}mv_m^2 \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}ky_m^2 = \frac{1}{2}mv_m^2 = \text{konst.}$$



Skládání kmitů

$$u_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \quad u_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Skládání kmitů stejné frekvence

Výpočet: Jedná se o lineární rovnice proto platí princip superpozice

Výsledný pohyb je periodický se stejnou frekvencí

$$u = A \sin(\omega t + \varphi)$$

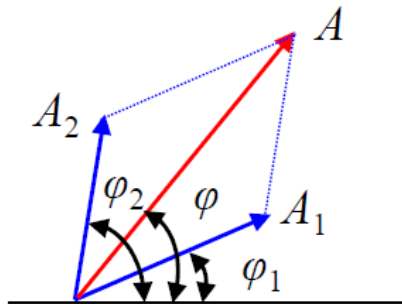
$$u = u_1 + u_2 = \sin \omega t (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) + \cos \omega t (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)$$

Amplituda:
$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Fázové posunutí:
$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

Graficky:

Grafické složení pomocí fázorů

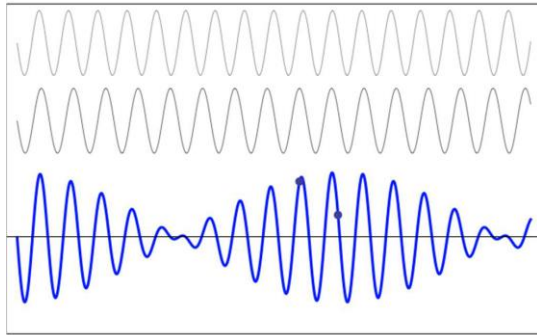


Rázy

Skládání kmitů blízké frekvence:

Pro zjednodušení výpočtu stejná amplituda

$$A = A_1 = A_2$$



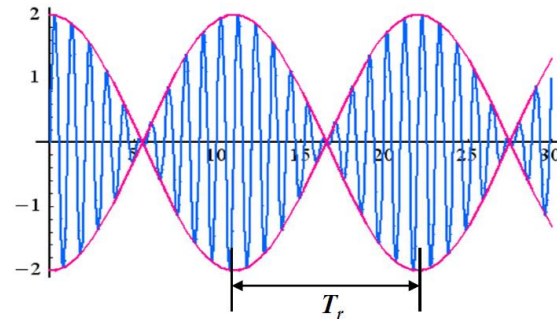
$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A \sin(\omega_2 t + \varphi_2) = \\ &= 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \end{aligned}$$

pomalu proměnná
amplituda $A(t)$

harmonický kmitavý
pohyb

Vznikají kmity pomalu proměnné amplitudy
vznik rázů (kolísání intenzity) s frekvencí

$$\text{Perioda rázů } f_r = |f_1 - f_2|, T_r = 1/f_r$$



Skládání kmitů ve 2D

Platí princip super pozice: $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \dots$

Složení kmitů v kolmých směrech (x,y)

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$

Pro zjednodušení složení kmitů stejných frekvencí:

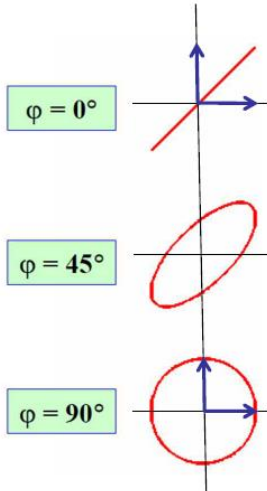
$$x = A_1 \sin(\omega_1 t)$$

$$y = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_0)$$

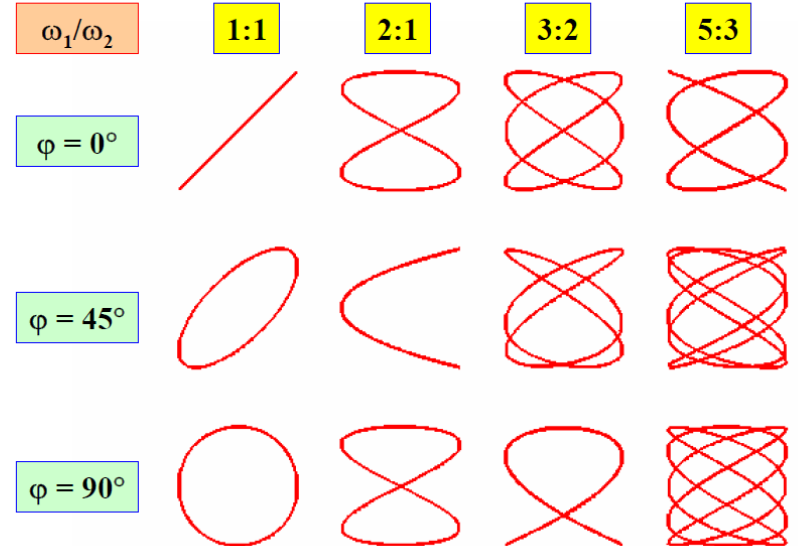
$$\frac{x^2}{A_1^2} - 2 \frac{xy}{A_1 A_2} \cos^2 \varphi_0 + \frac{y^2}{A_2^2} = \sin^2 \varphi_0$$

⊕ Lissajousovy obrazce: $\omega_1 \neq \omega_2$ $\omega_1 / \omega_2 = n_2 / n_1$

Stejně frekvence

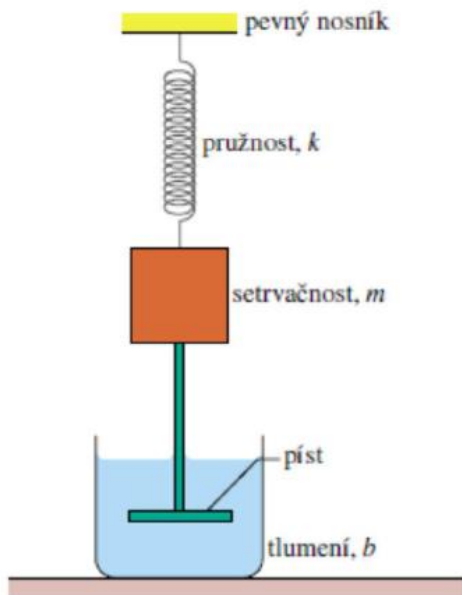


Různé frekvence



Tlumené kmitání

Tlumící síla $F_V = -kx - bv$ Pohybová rovnice



$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$x(t) = x_m e^{-bt/(2m)} \cos(\omega' t + \varphi)$$

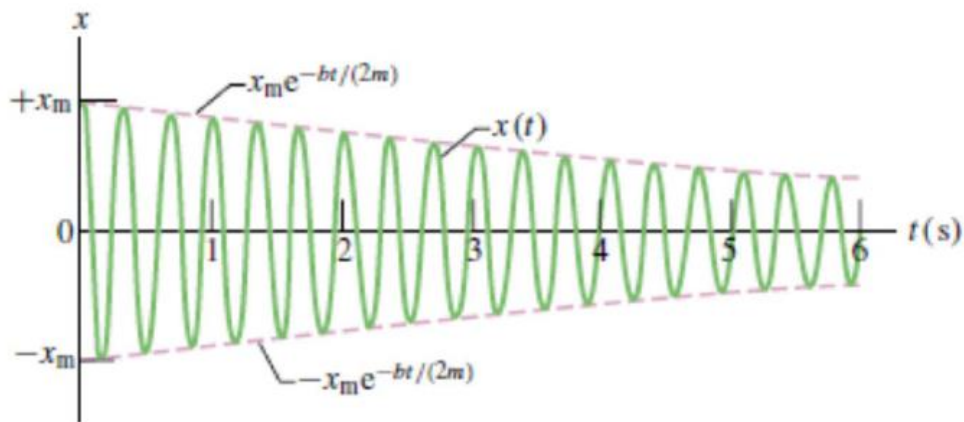
$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Tlumené kmitání

obalová křivka

$$x(t) = x_m e^{-bt/(2m)} \cos(\omega' t + \varphi)$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$



Útlum:

Pokles amplitudy po periodě

$$\frac{x_m e^{-\frac{bt}{2m}}}{x_m e^{-\frac{b(t+T)}{2m}}} = e^{\frac{bT}{2m}}$$

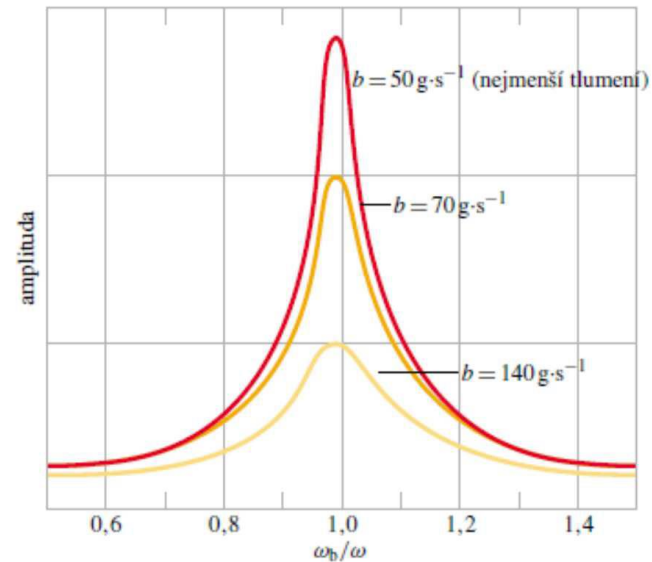
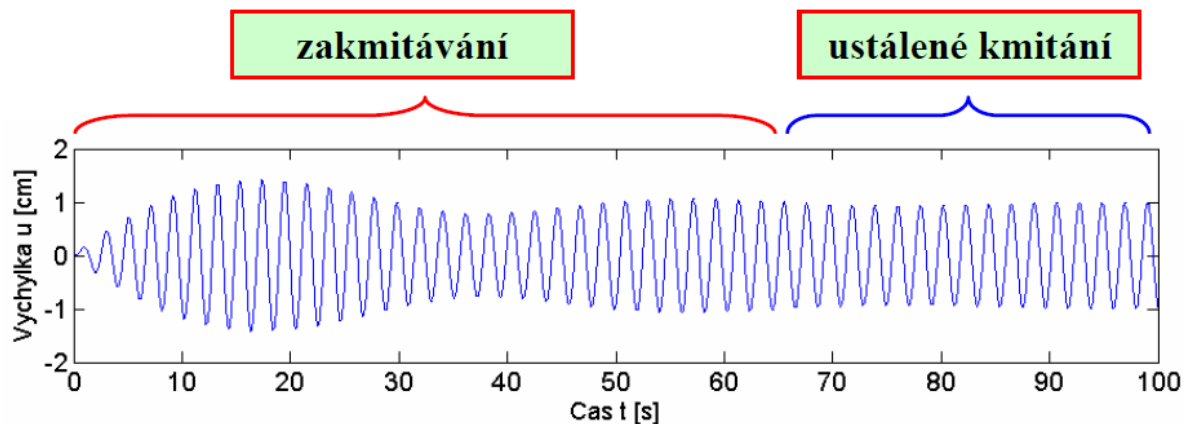
Logaritmický dekrement: [Bell, dB]

$$\log \frac{x(t)}{x(t+T)} = \frac{bT}{2m} \log e$$

Nucené kmitání

Kmit je nucen (buzen) periodickou silou o frekvenci

Výsledkem je kmit jehož perioda závisí na frekvenci

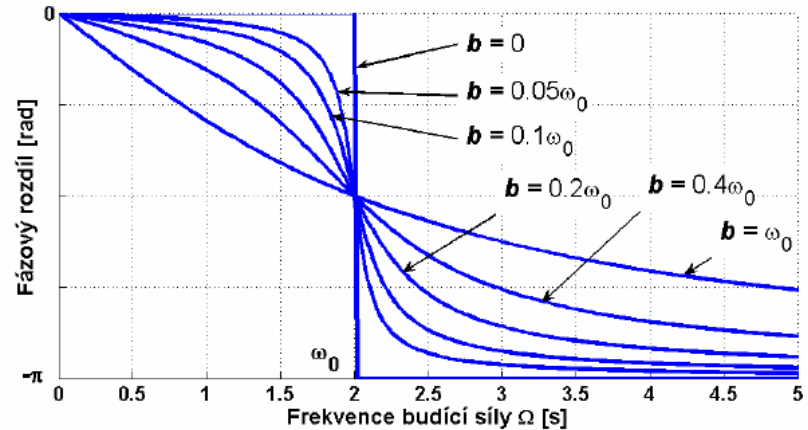
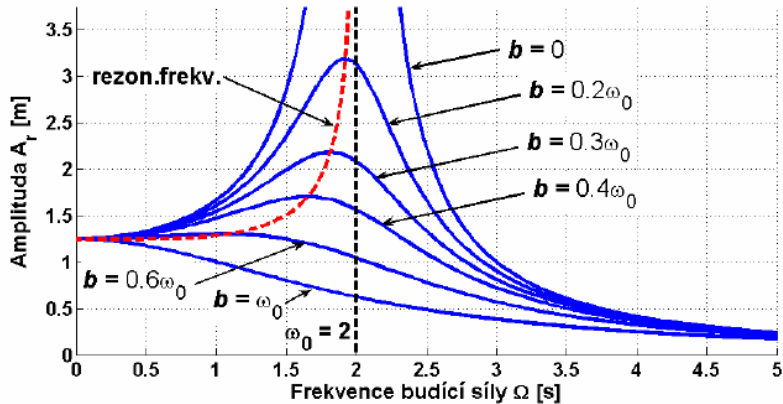
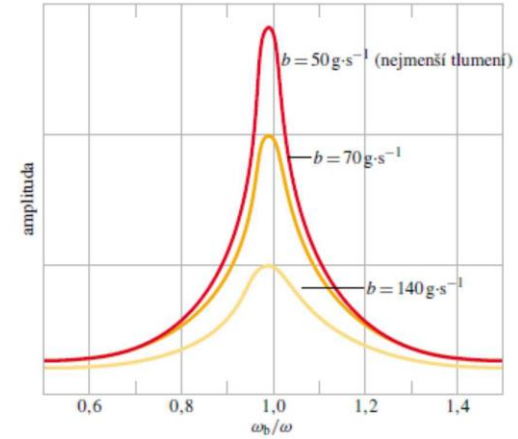


Nucené kmitání - rezonance

Nucené kmitání má v blízkosti ω_0 velmi zesílenou amplitudu x_m

Rezonanční frekvence:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$



Nucené kmitání - tlumení

Tlumený, anharmonický (přetlumený) a kriticky tlumený kmit

