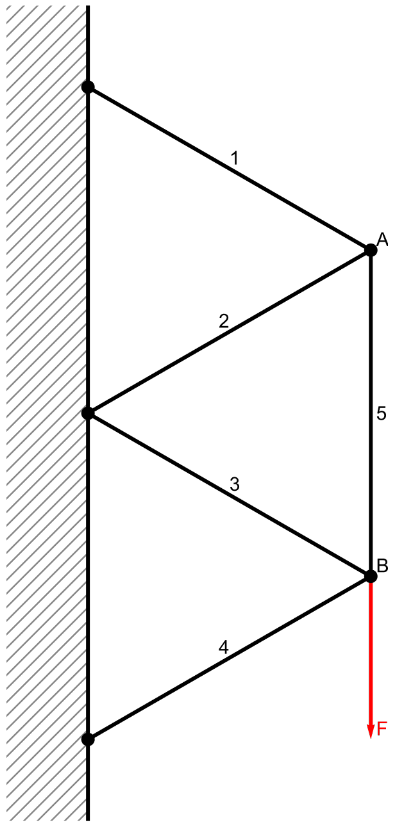
Prutová soustava se dvěma styčníky

Zadání



Prutová soustava je tvořena pěti pruty. Všechny pruty mají stejnou délku l a jsou uspořádané podle obrázku. Ve styčníku B působí svisá síla F. Pruty číslo 2 a 3 změnily svou teplotu o ΔT.

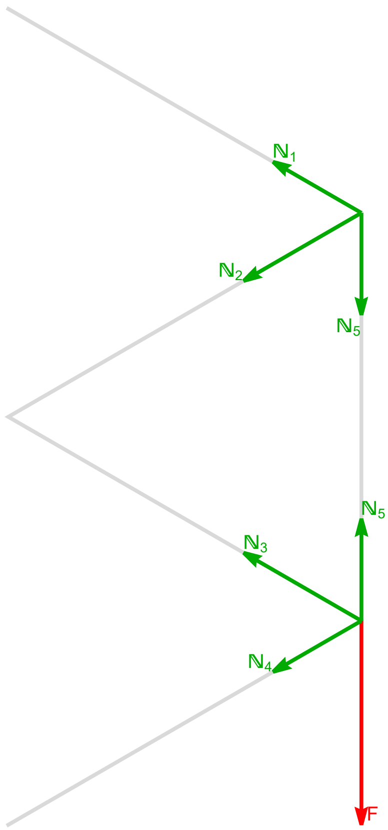
Dáno: - délky prutů l, jejich průřezy S
- materiál prutů: $\mathbb{E}$, α_T
- změna teploty druhého a třetího prutu ΔT

Určete: - Síly v prutech $\mathbb{N}_1$ až $\mathbb{N}_5$
- Napětí v prutech σ_1 až σ_5
- Posuvy styčníků A a B

Řešení

Rovnice rovnováhy

Pruty jsou binární členy, které mohou přenášet pouze osovou sílu. Tato síla je vlastně vnitřní silou v prutu. Síly v prutech proto označíme $\mathbb{N}_1$ až $\mathbb{N}_5$. *U* ***všech*** *sil v prutech budeme* ***vždy*** *předpokládat, že jsou tahové* a jako tahové je také do obrázku zakreslíme.



Rovnice rovnováhy obou styčníků jsou

$$-\mathbb{N}_1 \operatorname{Cos}[30°] - \mathbb{N}_2 \operatorname{Cos}[30°] = 0, \tag{1}$$

$$\mathbb{N}_1 \operatorname{Sin}[30°] - \mathbb{N}_2 \operatorname{Sin}[30°] - \mathbb{N}_5 = 0, \tag{2}$$

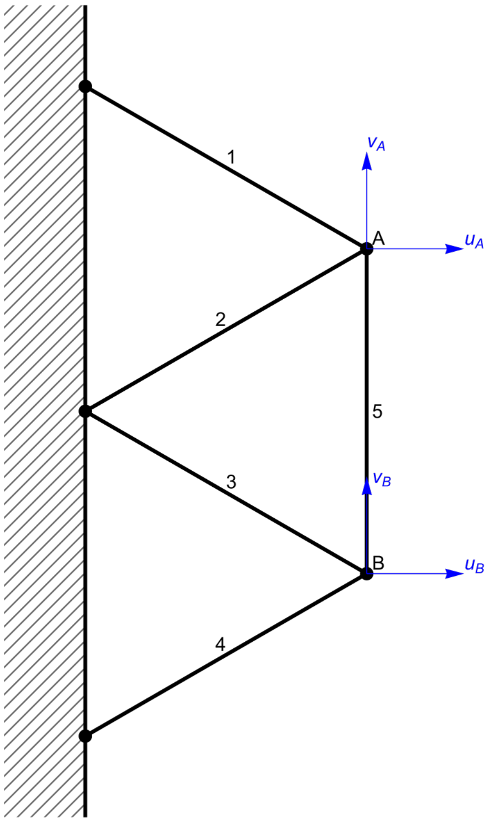
$$-\mathbb{N}_3 \operatorname{Cos}[30°] - \mathbb{N}_4 \operatorname{Cos}[30°] = 0, \tag{3}$$

$$\mathbb{N}_3 \operatorname{Sin}[30°] - \mathbb{N}_4 \operatorname{Sin}[30°] + \mathbb{N}_5 - F = 0. \tag{4}$$

Ve čtyřech rovnicích rovnováhy je pět neznámých sil. Prutová soustava je jednou staticky neurčitá.

Deformační rovnice

Abychom mohli zapsat deformační rovnice, musíme si nejprve promyslet, čím deformaci soustavy popíšeme. Protože jsou pruty připojené ke styčníkům, dojde ke změně polohy těchto styčníků. Deformaci prutové soustavy proto popíšeme pomocí posuvů styčníků. Styčníky jsou body a každý bod v rovině má dva stupně volnosti. Složky posuvů obou styčníků jsou na obrázku.



Deformační rovnice popisují, jak se změní délky prutů v důsledku změn poloh styčníků. Mají tedy obecný tvar

$$\Delta l_i = \Delta l_i (u_A,\ v_A,\ u_B,\ v_B),\ i = 1, 2, 3, 4 \tag{5}$$

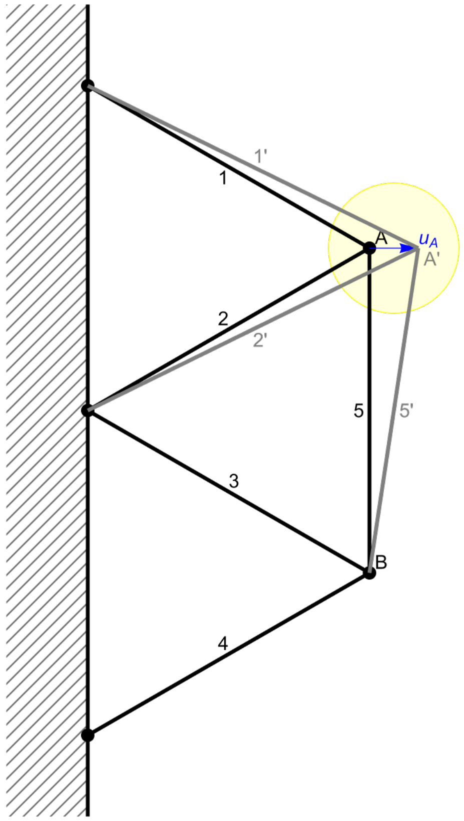
a naším úkolem je tyto závislosti popsat.

Budeme postupovat krok po kroku. Necháme všechny složky posuvů nulové s výjikou jedné jediné (například u_A) a zjistíme, co to udělá s délkami prutů. Získáme tak změny délek prutů, způsobené složkou posuvu u_A a tyto změny délek prutů označíme $\Delta l_i(u_A)$. Postupně získáme ještě $\Delta l_i(v_A)$, $\Delta l_i(u_B)$ a $\Delta l_i(v_B)$. Celková změna délky prutů je způsobena všemi těmito vlivy a proto platí

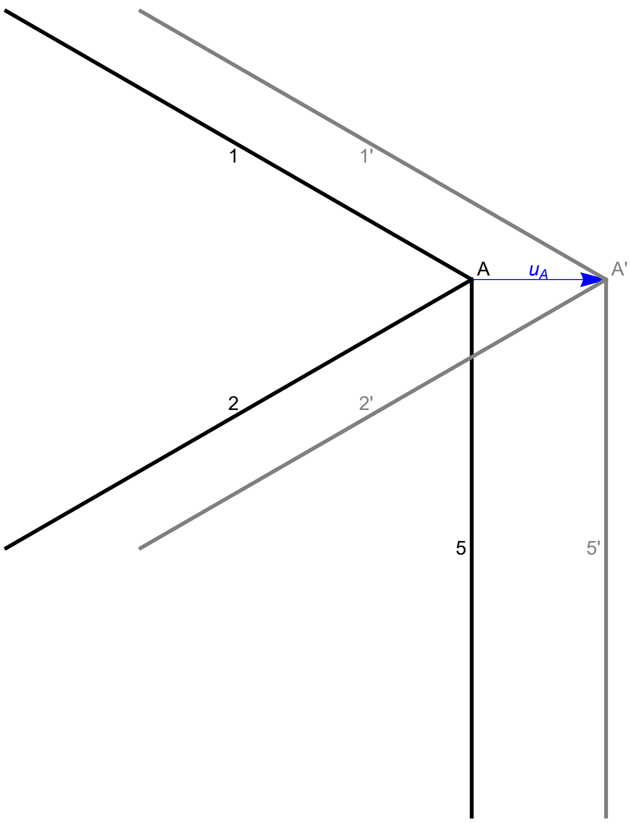
$$\Delta l_i = \Delta l_i (u_A) + \Delta l_i (v_A) + \Delta l_i (u_B) + \Delta l_i (v_B),\ i = 1, 2, 3, 4. \tag{6}$$

Změny délek prutů způsobené složkou u_A

Situaci znázorňuje následující obrázek. Musíme si uvědomit, že velikost posuvu u_A v obrázku je o několik řádů větší, než by mohla být ve skutečnosti. Musíme to tak udělat, jinak by nám nezdeformovaný a zdeformovaný stav na obrázku splývaly.

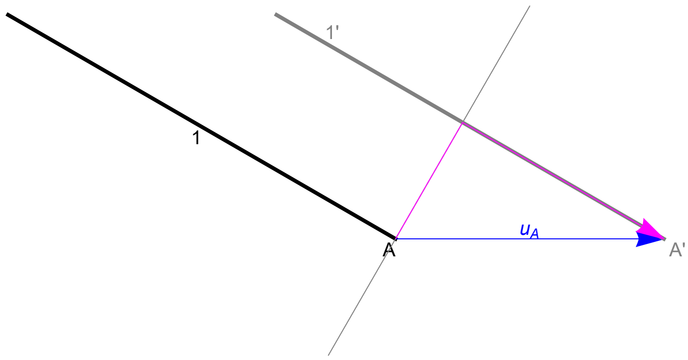


Žlutě vyznačenou oblast si zakreslíme ještě jednou ve velkém detailu. Nevidíme už celé pruty, ale jen jejich velmi krátké části v okolí styčníku A

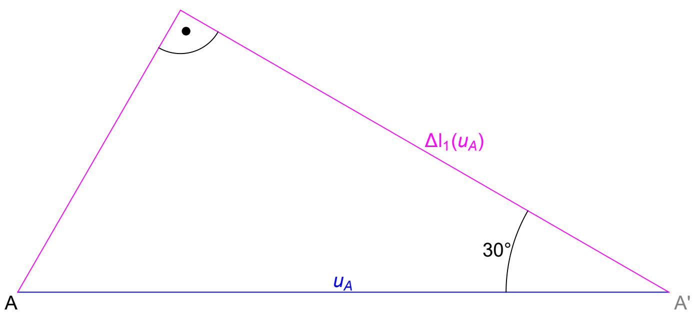


Změna délky prutu číslo 1

Situace se třemi pruty je stále poměrně nepřehledná. Zakresleme si tedy jen první prut a použijeme ještě o něco větší zvětšení.
Protože skutečná velikost posuvu u_A je velmi malá (například $\frac{1}{1000}$ délky prutu, nebo ještě méně), můžeme s velkou přesností prohlásit, že pruty 1 a 1' jsou navzájem rovnoběžné. Šedá přímka je tečnou ke kružnici, jejíž střed leží na druhém konci prutu 1 a která prochází bodem A. Protože je ale posuv u_A tak nesmírně malý, tak kružnice se svou tečnou v okolí bodu A splývá a šedá čára je tedy i malý segment této kružnice. Šedá přímka je kolmá na prut 1 i 1'.
Posuv u_A (označený modře) rozložíme na složku kolmou k prutu a složku ve směru prutu (znázorněno fialovou barvou).



Změna délky prutu Δl nezávisí na tom, zda jsme se z bodu A do bodu A' dostali přímo (po modré šipce), nebo nepřímo (po fialové šipce), ale jen na tom, kde leží body A a A'. První část fialové trasy (kolmá na prut) představuje pobyb konce prutu po kružnici. Přitom se délka prutu nemění. Druhá část fialové šipky míří ve směru prutu a představuje tak právě změnu délky prutu.



Platí tedy

$$\frac{\Delta l_1(u_A)}{u_A} = \mathrm{Cos}[30°], \tag{7}$$

čili

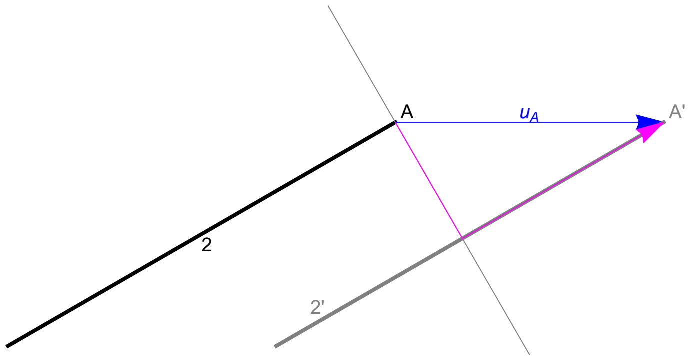
$$\Delta l_1(u_A) = u_A \,\mathrm{Cos}[30°]. \tag{8}$$

Změna délky prutu číslo 2

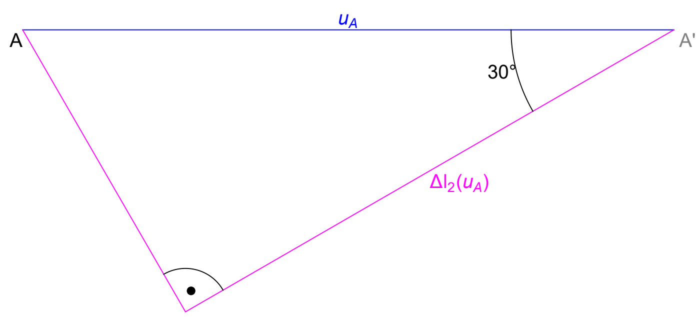
Zakresleme si jen druhý prut.
Protože skutečná velikost posuvu u_A je velmi malá, můžeme s velkou přesností prohlásit, že pruty 2

a 2’ jsou navzájem rovnoběžné. Šedá přímka je tečnou ke kružnici, jejíž střed leží na druhém konci prutu 2 a která prochází bodem A. Protože je ale posuv u_A tak nesmírně malý, tak kružnice se svou tečnou v okolí bodu A splývá a šedá čára je tedy i malý segment této kružnice. Šedá přímka je kolmá na prut 2 i 2’.

Posuv u_A (označený modře) rozložíme na složku kolmou k prutu a složku ve směru prutu (fialovou barvou).



Změna délky prutu Δl nezávisí na tom, zda jsme se z bodu A do bodu A’ dostali přímo (po modré šipce), nebo nepřímo (po fialové šipce), ale jen na tom, kde leží body A a A’. První část fialové trasy (kolmá na prut) představuje pobyb konce prutu po kružnici. Přitom se délka prutu nemění. Druhá část fialové šipky míří ve směru prutu a představuje tak právě změnu délky prutu.



Platí tedy

$$\frac{\triangle l_2\,(u_A)}{u_A} = \mathrm{Cos}[30\,°], \tag{9}$$

čili

$$\triangle l_2\,(u_A) = u_A\,\mathrm{Cos}[30\,°]. \tag{10}$$

Změna délky prutu číslo 5

Složka posuvu u_A je vodorovná a tedy kolmá k prutu č. 5. Styčník se tedy pohybuje po tečně ke kružnici, která má střed na druhém konci prutu č. 5. Protože je velikost u_A velmi malá, tečna v této oblasti s kružnicí splývá. To znamená, že vodorovný posuv u_A délku prutu číslo 5 nezmění:

$$\triangle l_5\,(u_A) = 0. \tag{11}$$

Změny délek ostatních prutů

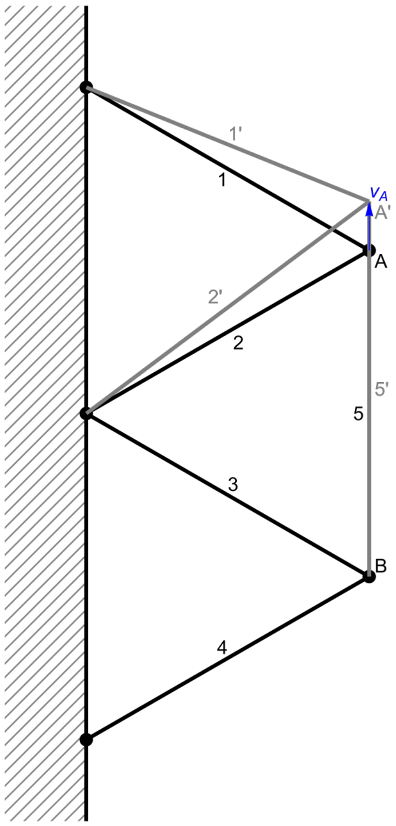
Do styčníku A už žádný další prut připojený není. Proto posuv tohoto styčníku délky ostatních prutů nezmění a platí

$$\triangle l_3 \, (u_A) = 0, \tag{12}$$

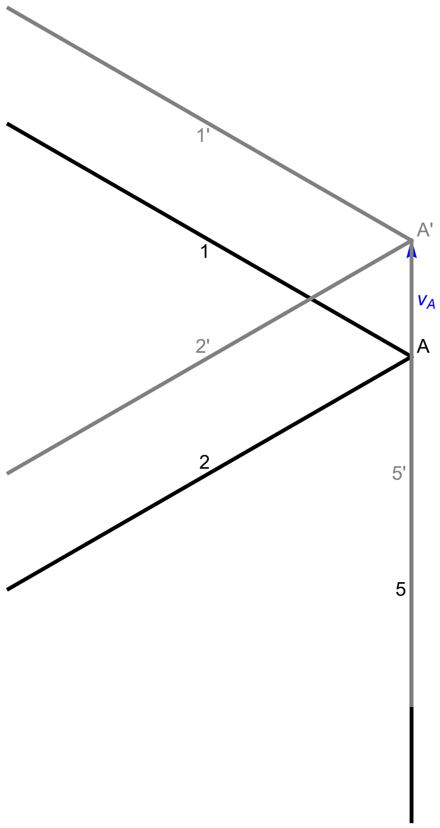
$$\triangle l_4 \, (u_A) = 0. \tag{13}$$

Změny délek prutů způsobené složkou v_A

Situaci znázorňuje následující obrázek. Musíme si uvědomit, že velikost posuvu u_A v obrázku je o několik řádů větší, než by mohla být ve skutečnosti. Musíme to tak nakreslit, jinak by nám nezdeformovaný a zdeformovaný stav na obrázku splývaly.

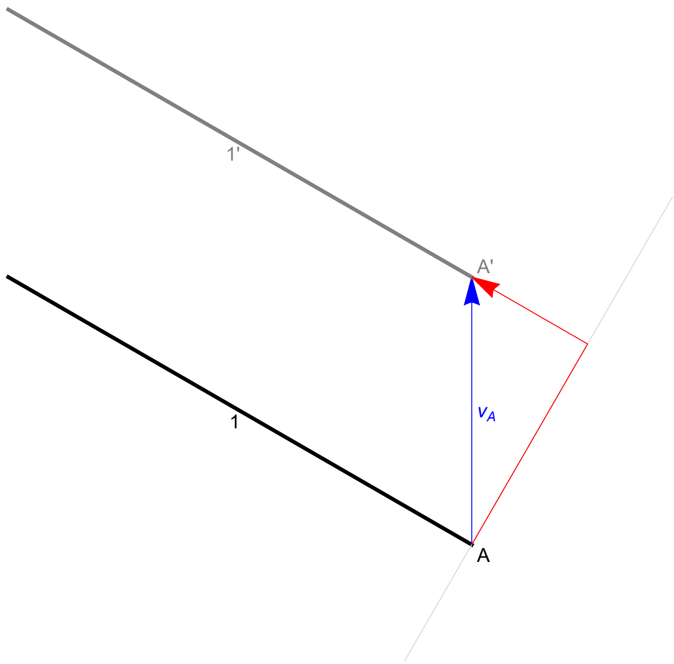


Zakreslíme si opět jen těsné okolí bodu A



a podíváme se na to, co se stane s délkami jednotlivých prutů.

Změna délky prutu č. 1

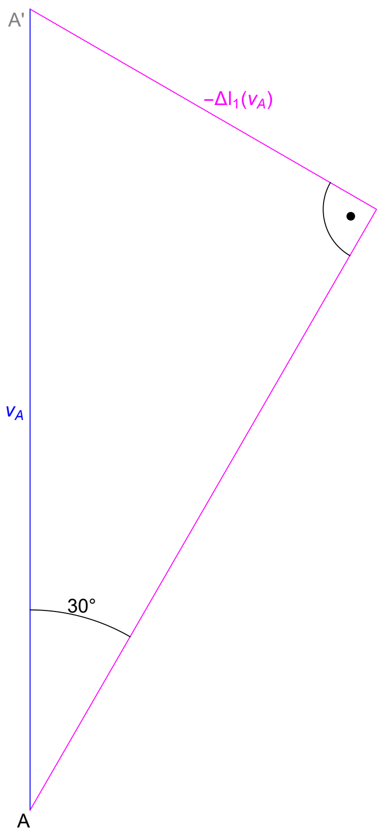


Svislý posuv styčníku v_A rozložíme do složky ve směru kolmé k prutu a do složky ve směru prutu. Složka kolmá k prutu je shodná tečnou ke kružnici se středem na druhém konci prutu a pro krátký oblouk je shodná s tečnou. To znamená, že složka komá k prutu délku prutu neovlivní. Prut se jen pootočí o nějaký nesmírně malý úhel.

Složka ve směru prutu (na obrázku šipka mířici doleva nahoru) ukazuje změnu délku prutu. Z obrázku je jasné, že prut se zkracuje a platí tedy

$$\triangle l_1 \,(v_A) < 0. \tag{14}$$

Změna délky prutu je záporná (například -0,02 mm). Délka úseček v trojúhelníku na následujícím obrázku je ale kladná (např. +0.02 mm)! To znamená, že délka úsečky není shodná se změnou délky prutu! Délka úsečky (která je kladná) je rovna změně délky prutu (která je záporná) vynásobené číslem -1.



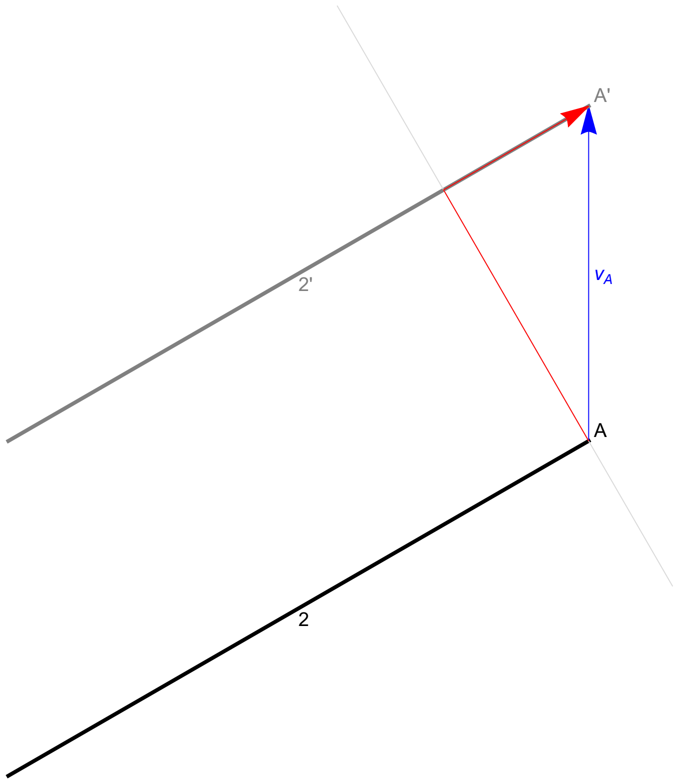
Platí tedy

$$\frac{-\triangle l_1 \,(v_A)}{v_A} = \mathrm{Sin}[30\,°] \tag{15}$$

a proto

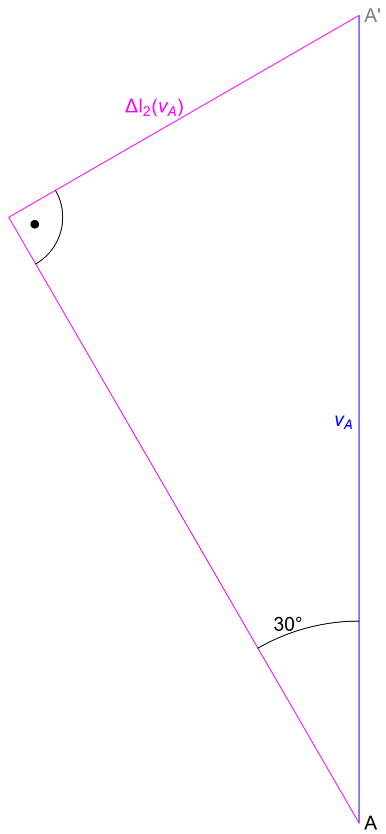
$$\triangle l_2 \,(v_A) = -v_A \cdot \mathrm{Sin}[30\,°]. \tag{16}$$

Změna délky prutu č. 2



Svislý posuv styčníku v_A rozložíme do složky ve směru kolmé k prutu a do složky ve směru prutu. Složka kolmá k prutu je shodná tečnou ke kružnici se středem na druhém konci prutu a pro krátký oblouk je shodná s tečnou. To znamená, že složka komá k prutu délku prutu neovlivní. Prut se jen pootočí o nějaký nesmírně malý úhel.

Složka ve směru prutu (na obrázku šipka mířící doprava nahoru) ukazuje změnu délku prutu.



Platí tedy

$$\frac{\triangle l_2 (v_A)}{v_A} = \text{Sin}[30 °] \tag{17}$$

a proto

$$\triangle l_2 (v_A) = v_A \,\text{Sin}[30 °]. \tag{18}$$

Změna délky prutu č. 5

Posuv v_A se odehrává přímo ve směru putu číslo 5 a proto platí

$$\triangle l_5 (v_A) = v_A. \tag{19}$$

Změny délek ostatních prutů

Pruty č. 3 a 4 nejsou připojeny ke styčníku A a proto posuvy tohoto styyčníhu délku těchto prutů neovlivní.

$$\triangle l_3 (v_A) = 0, \tag{20}$$

$$\triangle l_4 (v_A) = 0. \tag{21}$$

Změny délek prutů způsobené složkami u_B a v_B

Postup po stanovení změn délek jednotlivých prutů způsobených složkami posuvu styčníku B je stejný, jako postup, který jsme použili u styčníku A. Určete si všechny tyto hodnoty sami. Dostanete

$$\triangle l_1 (u_A) = 0, \tag{22}$$

$$\triangle l_2 (u_A) = 0, \tag{23}$$

$$\Delta l_3\ (u_A) = u_A \operatorname{Cos}[30\,°], \tag{24}$$

$$\Delta l_4\ (u_A) = u_A \operatorname{Cos}[30\,°], \tag{25}$$

$$\Delta l_5\ (u_A) = 0. \tag{26}$$

a

$$\Delta l_1\ (v_A) = 0, \tag{27}$$

$$\Delta l_2\ (v_A) = 0, \tag{28}$$

$$\Delta l_3\ (v_A) = -v_A \operatorname{Sin}[30\,°], \tag{29}$$

$$\Delta l_4\ (v_A) = v_A \operatorname{Sin}[30\,°], \tag{30}$$

$$\Delta l_5\ (v_A) = -v_A. \tag{31}$$

Deformační rovnice

Nyní můžeme dát dohromady vše, co jsme dosud o deformacích zjistili a sestavit konečně deformační rovnice.

$$\Delta l_1 = u_A \operatorname{Cos}[30\,°] - v_A \operatorname{Sin}[30\,°] + 0 + 0, \tag{32}$$

$$\Delta l_2 = u_A \operatorname{Cos}[30\,°] + v_A \operatorname{Cos}[30\,°] + 0 + 0, \tag{33}$$

$$\Delta l_3 = 0 + 0 + u_B \operatorname{Cos}[30\,°] - v_B \operatorname{Sin}[30\,°], \tag{34}$$

$$\Delta l_4 = 0 + 0 + u_B \operatorname{Cos}[30\,°] + v_B \operatorname{Sin}[30\,°], \tag{35}$$

$$\Delta l_5 = 0 + v_A + 0 - v_B. \tag{36}$$

Fyzikální rovnice

Fyzikální rovnice vykadřují vztah mezi zatížením prutu a jeho prodloužením. V případě naší prutové soustavy vypadají následovně. Nesmíme přitom zapomenout na změnu teploty ΔT, kterou podstoupí prut číslo 2 a 3!

$$\Delta l_1 = \frac{\mathbb{N}_1\, l}{\mathbb{E}\, S}, \tag{37}$$

$$\Delta l_2 = \frac{\mathbb{N}_2\, l}{\mathbb{E}\, S} + \alpha_T\, \Delta T\, l, \tag{38}$$

$$\Delta l_3 = \frac{\mathbb{N}_3\, l}{\mathbb{E}\, S} + \alpha_T\, \Delta T\, l, \tag{39}$$

$$\Delta l_4 = \frac{\mathbb{N}_4\, l}{\mathbb{E}\, S}, \tag{40}$$

$$\Delta l_5 = \frac{\mathbb{N}_5\, l}{\mathbb{E}\, S}. \tag{41}$$

Úplná soustava rovnic

Soustava rovnic pro určení sil v prutech se skládá z

- rovnic rovnováhy (4 rovnice)
- deformačních rovnic (5 rovnic)
- fyzkálních rovnic (5 rovnic).

V těchto čtrnácti rovnicích máme tyto neznámé:

- Síly v prutech $\mathbb{N}_1$ až $\mathbb{N}_5$ (5 neznámých)
- Změny délek prutů Δl_1 až Δl_5 (5 nezmámých)
- Posuvy styčníků u_A, v_A, u_B, v_B (4 neznámé)

Řešení

Protože podle zadání máme určit kromě sil v prutech a posuvů styčníků i napětí, můžeme k výše uvedené soustavě rovnic přidat ještě vztahy pro určení napětí ve tvaru

$$\sigma_1 = \frac{\mathbb{N}_1}{S}, \tag{42}$$

$$\sigma_2 = \frac{\mathbb{N}_2}{S}, \tag{43}$$

$$\sigma_3 = \frac{\mathbb{N}_3}{S}, \tag{44}$$

$$\sigma_4 = \frac{\mathbb{N}_4}{S}, \tag{45}$$

$$\sigma_5 = \frac{\mathbb{N}_5}{S}. \tag{46}$$

a získáme soustavu celkem devatednácti rovnic pro všechny veličiny, po kterých se nás ptá zadání.

Řešením soustavy dostáváme

$$\mathbb{N}_1 = \frac{2\left(3+\sqrt{3}\right)F + 3\left(1+\sqrt{3}\right)S\,\mathbb{E}\,\Delta T\,\alpha_T}{9+7\sqrt{3}}, \tag{47}$$

$$\mathbb{N}_2 = \frac{-2\left(3+\sqrt{3}\right)F - 3\left(1+\sqrt{3}\right)S\,\mathbb{E}\,\Delta T\,\alpha_T}{9+7\sqrt{3}}F, \tag{48}$$

$$\mathbb{N}_3 = \frac{\left(3+5\sqrt{3}\right)F - 3\left(1+\sqrt{3}\right)S\,\mathbb{E}\,\Delta T\,\alpha_T}{9+7\sqrt{3}}F, \tag{49}$$

$$\mathbb{N}_4 = \frac{-\left(\left(3+5\sqrt{3}\right)F\right) + 3\left(1+\sqrt{3}\right)S\,\mathbb{E}\,\Delta T\,\alpha_T}{9+7\sqrt{3}}F, \tag{50}$$

$$\mathbb{N}_5 = \frac{2\left(3+\sqrt{3}\right)F + 3\left(1+\sqrt{3}\right)S\,\mathbb{E}\,\Delta T\,\alpha_T}{9+7\sqrt{3}}F, \tag{51}$$

$$\sigma_1 = \frac{2\left(3+\sqrt{3}\right)F + 3\left(1+\sqrt{3}\right)S\,\mathbb{E}\,\Delta T\,\alpha_T}{\left(9+7\sqrt{3}\right)S}, \tag{52}$$

$$\sigma_2 = \frac{-2\left(3+\sqrt{3}\right)F - 3\left(1+\sqrt{3}\right)S\,\mathbb{E}\,\Delta T\,\alpha_T}{\left(9+7\sqrt{3}\right)S}, \tag{53}$$

$$\sigma_3 = \frac{\left(3+5\sqrt{3}\right)F - 3\left(1+\sqrt{3}\right)S\,\mathbb{E}\,\Delta T\,\alpha_T}{\left(9+7\sqrt{3}\right)S}, \tag{54}$$

$$\sigma_4 = \frac{-\left(\left(3+5\sqrt{3}\right)F\right) + 3\left(1+\sqrt{3}\right)S\,\mathbb{E}\,\Delta T\,\alpha_T}{\left(9+7\sqrt{3}\right)S}, \tag{55}$$

$$\sigma_5 = \frac{2\left(3+\sqrt{3}\right)F + 3\left(1+\sqrt{3}\right)S\,\mathbb{E}\,\Delta T\,\alpha_T}{\left(9+7\sqrt{3}\right)S}, \tag{56}$$

$$u_A = \frac{2\,l\left(2\left(-1+\sqrt{3}\right)F + \left(4+\sqrt{3}\right)S\,\mathbb{E}\,\Delta T\,\alpha_T\right)}{\left(9+7\sqrt{3}\right)S\,\mathbb{E}}, \tag{57}$$

$$v_A = \frac{2\sqrt{3}\,l\,(-4F + S\,\mathbb{E}\,\Delta T\,\alpha_T)}{\left(9+7\sqrt{3}\right)S\,\mathbb{E}}, \tag{58}$$

$$u_B = \frac{l\,\Delta T\,\alpha_T}{\sqrt{3}}, \tag{59}$$

$$v_B = -\frac{l\left(2\left(3+5\sqrt{3}\right)F + \left(3+\sqrt{3}\right)S\,\mathbb{E}\,\Delta T\,\alpha_T\right)}{\left(9+7\sqrt{3}\right)S\,\mathbb{E}}. \tag{60}$$